

IOAN MERCHEȘ

DANIEL RADU

## **ELECTRODINAMICĂ**

EDITURA UNIVERSITĂȚII "ALEXANDRU IOAN CUZA"

IAȘI - 2002



## PARTEA ÎNTÂI

### ELECTRODINAMICĂ FENOMENOLOGICĂ



## CUPRINSUL PĂRȚII ÎNTÂI

Notă asupra ediției .....	8
Prefață .....	11
Scurt istoric.....	13
 <b>CAPITOLUL I. CÂMPUL ELECTROSTATIC</b> .....	<b>17</b>
1.1. Legea lui Coulomb.....	17
1.2. Densitatea de sarcină.....	18
1.3. Câmpul electrostatic.....	20
1.4. Fluxul câmpului electrostatic .....	21
1.5. Potențialul câmpului electrostatic.....	23
1.6. Energia câmpului electrostatic .....	32
1.7. Dipolul electric .....	35
1.8. Multipoli electrici.....	38
Probleme .....	43
1.9. Polarizarea dielectricilor .....	44
1.10. Teorema lui Gauss relativă la medii dielectrice .....	46
1.11. Tipuri de dielectrici.....	47
1.12. Ecuații de trecere pentru componentele de câmp <b>E</b> , <b>D</b> ...	48
Probleme .....	52
1.13. Metode speciale. Considerații generale .....	52
1.14. Metoda imaginilor electrice .....	53
1.15. Integrarea ecuației lui Laplace prin metoda separării variabilelor .....	58
1.16. Probleme electrostatice bidimensionale.....	64

1.17. Acțiunea mecanică a câmpului electrostatic asupra unui mediu dielectric. Electrostricțiunea .....	71
Probleme .....	76
 <b>CAPITOLUL II. CÂMPUL CURENȚILOR STAȚIONARI ..</b>	<b>78</b>
2.1. Curentul electric staționar .....	78
2.2. Câmpul magnetic al curentului electric staționar .....	85
2.3. Dipolul magnetic .....	87
2.4. Teorema lui Ampere .....	88
2.5. Potențialul vector al câmpului curentului staționar .....	91
2.6. Energia câmpului magnetic al curenților staționari .....	92
2.7. Multipoli magnetici .....	94
Probleme .....	98
2.8. Medii magnetice polarizate .....	99
2.9. Tipuri de medii magnetizabile .....	101
2.10. Ecuații de trecere pentru componentele de câmp $\mathbf{H}$ , $\mathbf{B}$ ..	102
Probleme .....	103
 <b>CAPITOLUL III. CÂMPUL ELECTROMAGNETIC .....</b>	<b>105</b>
3.1. Ecuațiile lui Maxwell pentru vid .....	105
3.2. Ecuațiile lui Maxwell pentru medii polarizabile .....	110
3.3. Ecuații de trecere .....	119
3.4. Energia câmpului electromagnetic. Teorema lui Poynting ..	121
3.5. Impulsul câmpului electromagnetic. Teorema impulsului ..	124
3.6. Momentul cinetic al câmpului electromagnetic. Teorema momentului cinetic .....	128
3.7. Potențiale electrodinamice .....	129
3.8. Utilizarea potențialelor electrodinamice în deducerea analitică a unor ecuații fundamentale din electrodinamică .....	137
Probleme .....	142
3.9. Ecuațiile câmpului electromagnetic pentru medii în mișcare .....	143

<b>CAPITOLUL IV. UNDE ELECTROMAGNETICE .....</b>	<b>153</b>
4.1. Considerații generale .....	153
4.2. Propagarea undelor electromagnetice prim medii de tip dielectric .....	155
4.3. Polarizarea undelor electromagnetice .....	163
4.4. Reflexia și refracția undelor electromagnetice .....	168
Probleme .....	178
4.5. Propagarea undelor electromagnetice în conductoare masive. Efectul pelicular .....	178
4.6. Propagarea undelor electromagnetice în medii de tip semiconductor .....	182
4.7. Propagarea undelor electromagnetice în medii anizotrope ..	185
4.8. Dispersia undelor electromagnetice .....	194
4.9. Propagarea undelor electromagnetice prin ghiduri de undă .....	216
4.10. Teoria radiației electromagnetice .....	231
Probleme .....	249
 <b>CAPITOLUL V. ELEMENTE DE</b>	
<b>MAGNETOFLUIDODINAMICĂ .....</b>	<b>250</b>
5.1. Considerații generale .....	250
5.2. Ecuațiile de bază ale magnetofluidodinamicii .....	252
5.2. "Înghetarea" liniilor câmpului magnetic .....	255
5.3. Unde magnetohidrodinamice .....	257
5.4. Unele probleme ale magnetohidrostaticii .....	263
Probleme .....	270

## Notă asupra ediției

Teoria producerii și propagării câmpului electromagnetic, cunoscută sub numele de *Electrodinamică*, are câteva caracteristici fundamentale, între care remarcăm : vastitatea ariei fenomenelor conexe, diversitatea modurilor de abordare a teoriei și aplicabilitatea practică a modelelor investigate.

În primul rând, *Electrodinamica*, privită ca disciplină de studiu universitar, este parte componentă a bazei teoretice pe care se clădește întregul edificiu al cunoștințelor viitorilor specialiști care, ulterior, studiază discipline ca : Dispozitive și circuite electronice, Fizica plasmei, Teoria cuantică a câmpului, Fizica și tehnica microundelor, Mecanica cuantică, Optica etc.

În al doilea rând, teoria câmpului electromagnetic poate fi abordată din mai multe unghiuri, corespunzătoare perfecționării cunoștințelor noastre despre natură și a instrumentului matematic. Astfel, alături de teoria maxwelliană a câmpului electromagnetic, denumită și *fenomenologică*, Electrodinamica poate fi tratată și relativist-covariant, fie din punctul de vedere al Teoriei restrânse a relativității, fie din cel al Relativității generale. În sfârșit, același grup de fenomene pot fi studiate prin formalismul oferit de Teoria cuantică a câmpului, în care un rol central îl are *Electrodinamica cuantică*.

În al treilea rând, dar nu și cel din urmă, este de remarcat faptul că undele electromagnetice, inițial *prevăzute* (prin teoria lui Maxwell) și abia apoi puse în evidență experimental, sunt purtătoare de informație în cele mai diverse aplicații, de la cele mai vechi (radio-ul, televiziunea, radarul etc.) și până la cele mai noi (telefonie mobilă, comunicația prin fibre optice, descifrarea semnalelor cosmice etc.). Referindu-ne la studiul universitar al Teoriei câmpului electromagnetic, menționăm că există formațiuni mari de studiu, chiar facultăți, care au ca obiect *tehnica* pro-



ducerii și propagării undelor electromagnetice (în particular, a curenților de diverse frecvențe și intensități).

Cartea pe care o prezentăm cititorilor adună într-un număr mic de pagini o cantitate mare de informație. *Electrodinamica*, una dintre cele mai frumoase și utile teorii ale fizicii, poate fi tratată sau axiomatic, plecând de la câteva principii fundamentale și ajungând la electrostatică, câmpul curenților staționari etc. drept cazuri particulare, sau plecând de la simplu spre complex și de la particular la general, urmând totodată traseul evoluției în timp a cunoștințelor despre câmpul electromagnetic. Autorii au ales ultima cale și, având în vedere nivelul de pregătire al celor cărora le este adresată monografia, apreciem că au ales soluția cea mai nimerită.

Primele capitole ale cărții sunt consacrate studiului unor elemente fundamentale din teoria câmpului electrostatic și teoria câmpului produs de curenții staționari, cum ar fi : multipolii staționari, ecuațiile potențialului scalar și vectorial, medii polarizabile, teoreme generale etc. Cunoștințele acumulate sunt apoi aplicate în studiul cantitativ al câmpului electromagnetic, începând cu ecuațiile lui Maxwell și continuând cu diverse aplicații ale acestora în definirea mărimilor fundamentale ale câmpului electromagnetic (impuls, energie, moment cinetic) și evoluția acestora în timp. Studiul producerii și propagării undelor electromagnetice prin diverse modele de mediu fac obiectul celui de al patrulea capitol. Tot aici se discută polarizarea, reflexia și refracția, dispersia și ghidarea undelor electromagnetice. Prima parte se încheie cu un capitol consacrat unui domeniu de graniță dintre electrodinamică și teoria fluidelor, anume Magnetodinamica fluidelor.

Următoarele cinci capitole au ca scop pregătirea cititorului cu principiile și formalismul necesar abordării relativist-restrânse a Electrodinamicii : postulatele lui Einstein, transformarea Lorentz-Einstein și consecințele acesteia, spațiul Minkowski în diverse reprezentări etc. Formalismul oferit de calculul tensorial permite autorilor, în continuare, scrierea relativist-covariantă a celor mai importante ecuații și legi de conservare din Electrodinamică. Ultimul capitol al cărții este consacrat câtorva elemente de Relativitate generală și, prin acest formalism, studiului ecuațiilor fundamentale din Electrodinamică în prezența câmpului gravitațional.

Experiența acumulată de subsemnatul în peste 50 de ani de carieră didactică universitară, timp în care am predat aproape toate disciplinele de fizică teoretică, mă îndreptățește să recomand călduros această carte cititorilor, cu convingerea că le va servi nu numai la îmbogățirea orizontului științific, dar și la dezvoltarea capacității de a gândi.

Prof.dr. Ioan Gottlieb

Iași, 2002

## P R E F A Ț Ă

Prin "Electrodinamică" se înțelege, în general, teoria unitară a câmpului electromagnetic, conceput ca purtător de energie, impuls și moment cinetic. Acest studiu se poate realiza fie fenomenologic, în cazul mediilor în repaus sau în mișcare cu viteză mică în comparație cu viteza luminii, fie relativist-covariant, abordare ce cuprinde orice viteză de grup posibilă (dar inferioară vitezei luminii în vid).

De fapt, Electrodinamica și Teoria Relativității nu sunt teorii distincte, independente. Nu există o electrodinamică "relativistă" și una "nerelativistă", cele două abordări diferind doar prin nivelul formalismului matematic utilizat. Așa cum cititorul va afla parcurgând cartea de față, teoria relativității a apărut și s-a dezvoltat *în cadrul* studiului electrodinamicii corpurilor în mișcare, deci se poate afirma că *Electrodinamica este relativistă*.

Cele două moduri de analiză au stat, de altfel, la baza conceperii în două părți a prezentei lucrări, criteriu la care autorii au adăugat principiul didactico-metodologic al trecerii de la simplu la complex, în strânsă corelație cu ordinea cronologică a elaborării teoriilor ce formează coloana vertebrală a electrodinamicii.

Partea I conține cinci capitole, consacrate trecerii în revistă a principiilor, noțiunilor fundamentale și ecuațiilor (legilor) de bază ale electrostaticii, teoriei curenților staționari, teoriei câmpului electromagnetic, generării și propagării acestuia sub formă de unde, precum și ale unei discipline de graniță – magnetodinamica fluidelor.

Cea de a doua parte este concepută pe șapte capitole. După expunerea bazelor experimentale și a principiilor teoriei relativității restrânse, se discută principalele consecințe ale transformării Lorentz-Einstein. În continuare, se aplică formalismul analitic și cel tensorial în formularea relativist-covariantă a fenomenelor fundamentale din mecanică și electrodinamică. Capitolul se încheie cu elemente de

teorie a relativității generale și, ca aplicație, studiul general-relativist al câmpului electromagnetic.

La sfârșitul volumului se găsesc șase anexe, menite a facilita înțelegerea de către cititor a formalismului matematic utilizat în carte: calcul tensorial, distribuția *delta*, funcția Green, operatori diferențiali în diverse sisteme de coordonate etc.

În țară și peste hotare s-au scris, în ultimele decenii, numeroase cărți de Electrodinamică, unele dintre ele excelente, care pot fi găsite și în traducere românească. Scopul elaborării cărții de față este, înainte de toate, didactic, autorii dorind a prezenta cititorului un mod de abordare a unora dintre cele mai revoluționare teorii ale fizicii. Aceasta s-a realizat printr-o anumită selecție a materialului de studiu, care să fie cât mai cuprinzător pe de o parte, dar concis și sobru — pe de alta.

Prin importanța materiei tratate (Planul de învățământ al Facultăților de fizică, din țară și străinătate, conține această disciplină ca obiect de studiu fundamental), cartea de față se adresează studenților Facultăților de Fizică (toate secțiile), Matematică, Chimie, precum și studenților facultăților tehnice, care audiază cursuri de "fizică generală". În fine, lucrarea este utilă cadrelor didactice din învățământul preuniversitar, care doresc a se perfecționa prin modalitățile ce le sunt oferite prin lege: definitivat, gradul II și gradul I.

Materialul cuprins în prezentul volum este rodul multor ani de predare a cursului de "Electrodinamică și teoria relativității" și de conducere a seminariilor aferente acestui curs, la Facultatea de Fizică de la Universitatea "Al.I.Cuza" din Iași. Autorii doresc a mulțumi tuturor celor care au contribuit la apariția cărții și, cu anticipație, celor ce ne vor spune părerea lor sinceră despre modestul nostru demers.

Scriind această carte, dorim a adresa un mesaj de suflet distinșilor noștri înaintași, prof.dr. Teofil Vescan, fondatorul școlii ieșene de fizică teoretică, precum și discipolilor acestuia, prof.dr. Ioan Gottlieb și lect.dr Cleopatra Mociuțchi, la școala cărora ne-am luminat și am învățat să distingem adevăratele valori spirituale.

Autorii

## SCURT ISTORIC

De la primele observații asupra fenomenelor electrice și magnetice, aparținând lui Thales din Milet, Democrit, Platon, Aristotel și până la cel dintâi rezultat cantitativ, exprimat prin legea lui Coulomb, stabilită în a doua jumătate a secolului al XVII-lea, au trecut peste două milenii.

În cele două mii de ani, observațiile și experimentele au avut un caracter *calitativ*, ceea ce nu a permis elaborarea unei teorii științifice a fenomenelor electrice și magnetice. În această perioadă s-au acumulat o serie de date experimentale care au condus, în mod necesar, la ceea ce cunoaștem azi sub numele de Electromagnetism. Să le trecem, succint, în revistă.

În antichitate se cunoaște busola, prin urmare proprietățile magnetice ale corpurilor, precum și electrizarea produsă prin frecare.

În evul mediu, la preocupările privind studiul busolei se adaugă cele privind magnetismul pământesc. În "Epistola de magnete" (1269), *Petrus Peregrinus* introduce noțiunile de pol sud, pol nord și magnetism terestru. De probleme ale magnetismului terestru se ocupă și medicul englez *William Gilbert* în cartea "De magnete" (1600). Aici, el definește noțiunea de pol magnetic pământesc și descrie unele experimente privind fenomenele electrice și magnetice statice.

Cercetările lui Gilbert dau un avânt considerabil studiului experimental al electrostaticii și magnetostaticii. Menționăm aici celebra lucrare "Experimenta Nova" (1672) a lui *Otto von Guericke*, în care pentru prima dată substanțele sunt împărțite în conductori și izolatori, precum și observațiile experimentale ale lui *Stefan Gray* care, în 1731, reușește să trimită electricitate prin fire metalice.

În secolul al XVIII-lea sunt inventate electroscopul (*Charles-Francois Dufay* - 1723) și butelia de Leyda (*Pieter van Musschenbrock* - 1765). În aceeași perioadă, *Benjamin Franklin* inventează paratrăsnetul, construiește condensatorul plan și dă denumirile de "electricitate pozitivă" și "negativă". Cercetările efectuate în această perioadă se bazează pe ipoteza existenței unui fluid imponderabil numit *eter*, ca substrat al fenomenelor electrice, magnetice și luminoase.

După enunțarea legii lui Coulomb în 1785, începe o perioadă nouă în studiul fenomenelor electrice și magnetice. Cercetările sunt legate de numele lui *Carl Friederich Gauss*, *Pierre Simon de Laplace*, *Siméon-Denis Poisson*, *Alessandro Volta*, *Humphry Davy*, *Georg Ohm*, *James Prescott Joule* ș.a.

În 1820 fizicianul danez *Hans Christian Oersted* descoperă efectul magnetic al curentului electric. Prin aceasta se stabilește o legătură între cele două grupe de fenomene, electrice și magnetice, considerate până atunci principial distincte. Cercetările lui Oersted sunt continuate de *André Marie Ampère* care dă teorema ce-i poartă numele, stabilește echivalența dintre curentul circular și o foiță magnetică și găsește expresia forței de interacțiune dintre doi curenți.

Deosebit de importante în dezvoltarea electrodinamicii sunt cercetările lui *Michael Faraday* care, în 1831, descoperă fenomenul de **inducție electromagnetică**, în 1833 - legile electrolizei, iar în 1836 elaborează teoria liniilor de forță electrice și magnetice. Tot el introduce noțiunea de **câmp** pe care-l concepe ca un mediu material continuu, intensitatea câmpului într-un punct caracterizând câmpul în acel punct. Spre deosebire de majoritatea predecesorilor săi, ale căror teorii sunt tributare interpretării fenomenelor electrice și magnetice de pe pozițiile mecanicii, Faraday consideră că interacțiunile electrice nu se propagă instantaneu, "la distanță", ci într-un timp finit, din aproape în aproape (prin *contiguitate*), câmpul având rol de mijlocitor al acestor interacțiuni. Faraday introduce noțiunea de permeabilitate magnetică, descoperă dia- și paramagnetismul și intuiește existența curentului de deplasare. În anul 1832 Faraday predă Societății Regale din Londra un plic sigilat, cu rugămintea de a fi deschis peste 100 de ani. În 1932, când s-a deschis plicul, s-a constatat că Faraday prevăzuse - între altele - existența undelor electromagnetice.

Ideile revoluționare ale lui Faraday sunt profund înțelese și strălucit continuate de *James Clark Maxwell*. Opera sa capitală este "Tratat de electricitate și magnetism" (1873). Aici Maxwell își expune celebrele sale ecuații (se spune că cel mai important lucru în teoria lui Maxwell îl reprezintă ecuațiile sale), pe baza cărora elaborează teoria electromagnetică a luminii și emite ideea existenței undelor electromagnetice. Teoria lui Maxwell neagă concepția newtoniană, a interacțiunii la distanță, și o înlocuiește cu cea a acțiunii prin contiguitate, dar rămâne tributară celei dintâi prin aceea că preia noțiunea de eter, câmpul fiind conceput de el ca o stare de tensiune elastică a eterului. (Teoria relativității elimină, ca inutilă, existența unui astfel de reper absolut. Aceasta nu împiedică, însă, pe diverși fizicieni să reînvie problema eterului, să-l cuantifice și să studieze caracteristicile cuantei de eter, *eteronul*). Generalizând legile fundamentale ale curenților staționari și electromagnetismului, Maxwell introduce noțiunea de *curent de deplasare* și admite că fenomenele electromagnetice pot avea loc și în vid. Teoria lui Maxwell triumfă în anul 1888, când *Heinrich Rudolf Hertz* produce unde electromagnetice, demonstrând reflexia, refracția, difracția și interferența acestora.

Descoperirea electronului de către *James J. Thomson* în 1896 a permis elaborarea teoriei microscopice a fenomenelor electromagnetice, la care au contribuit *Hendric Antoon Lorentz*, *Henri Poincaré*, *Paul Langevin* ș.a. Teoria electronică a permis explicarea unor fenomene ca: dia-, para- și feromagnetismul, polarizarea substanțelor dia-, para- și feroelectrice, dispersia luminii ș.a., fenomene ce nu puteau fi interpretate în lumina teoriei macroscopice a lui Maxwell.

Elaborarea electrodinamicii corpurilor în mișcare de către *Hertz* și *Lorentz* în ultimele decenii ale secolului al XIX-lea a condus, între altele, la apariția unor contradicții principiale în problema antrenării eterului de către corpurile în mișcare. Aceste contradicții sunt rezolvate prin elaborarea *Teoriei relativității restrânse*, în anul 1905, de către *Albert Einstein*. Principiile, formalismul și aplicațiile teoriei relativității fac obiectul celui de al doilea volum al prezentei lucrări.

În primele decenii ale secolului trecut au fost elaborate teorii care au la bază cuantificarea câmpului electromagnetic (*Electrodinamica cuantică*) sau studiul interacțiunii dintre fluidele conductoare și câmpul electromagnetic (*Magnetofluidodinamica*).





# CAPITOLUL I

## CÂMPUL ELECTROSTATIC

### A. Câmpul electrostatic în vid

#### §1.1. Legea lui Coulomb

În anul 1773 *Henry Cavendish* (1731-1810) deduce, prin analogie cu legea atracției universale stabilită de Isaac Newton, relația ce exprimă forța de interacțiune dintre două sarcini electrice punctiforme. Cercetările lui Cavendish rămân însă necunoscute timp de peste un secol și sunt publicate abia în 1879 de către J.C.Maxwell.

Experimental, legea forței de interacțiune electrostatică este stabilită de inginerul francez *Charles Augustin Coulomb* (1736-1806), membru al Academiei de Științe din Paris, cu ajutorul balanței de torsiune și al pendulului electric. Lucrarea sa este publicată în anul 1785, motiv pentru care a rămas denumirea de "legea lui Coulomb".

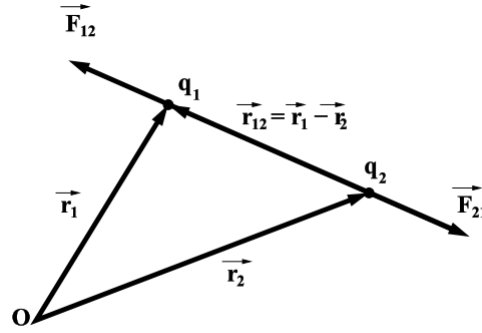
Potrivit legii lui Coulomb, două sarcini punctiforme  $q_1$  și  $q_2$ , așezate în vid, interacționează după legea

$$\mathbf{F}_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12}, \quad (1.1)$$

unde semnificația vectorilor  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  rezultă din Fig.1.1.

Constanta  $k_e$  depinde de sistemul de unități, fiind egală cu  $\frac{1}{4\pi\epsilon_o}$  în S.I., în care  $\epsilon_o = 8,854 \cdot 10^{-12}$  F/m este permitivitatea absolută a

vidului. (Termenul de "vid" este înlocuit uneori, în literatură, cu cel de "spațiu liber").



**Fig. 1.1.**

Întrucât  $\mathbf{r}_{12} = -\mathbf{r}_{21}$ , rezultă că  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ , deci interacțiunile electrostatice satisfac principiul acțiunii și reacțiunii. Spre deosebire însă de legea atracției universale a lui Newton, forța de interacțiune electrostatică poate fi atât de atracție, cât și de respingere, în funcție de semnul sarcinilor.

În cazul unui mediu oarecare,  $\epsilon_o$  se înlocuiește cu permitivitatea absolută  $\epsilon$  a mediului respectiv, legată de  $\epsilon_o$  prin relația  $\epsilon = \epsilon_o \epsilon_r$ , unde  $\epsilon_r$  este permitivitatea relativă a mediului.

Dacă asupra sarcinii punctiforme  $q$  acționează  $n$  sarcini punctiforme  $q_1, \dots, q_n$ , forța rezultantă ce se exercită asupra lui  $q$  se exprimă prin

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n k_e \frac{qq_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} q \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (1.2)$$

în care prin  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  am indicat faptul că forța  $\mathbf{F}$  se măsoară în punctul în care se află sarcina  $q$ , a cărei poziție este definită prin vectorul de poziție  $\mathbf{r}$ .

### §1.2. Densitatea de sarcină

Admițând că sarcina electrică este distribuită în mod continuu pe corpul ce o poartă, vom caracteriza această distribuție prin noțiunea de

*densitate de sarcină*. Distribuția sarcinii depinde de forma geometrică și natura corpului. Întâlnim următoarele cazuri:

a) Distribuția liniară

$$\lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl}; \quad q = \int_C \lambda \, dl, \quad (1.3)$$

b) Distribuția superficială

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS}; \quad q = \int_S \sigma \, dS, \quad (1.4)$$

c) Distribuția spațială

$$\rho = \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta \tau} = \frac{dq}{d\tau}; \quad q = \int_V \rho \, d\tau. \quad (1.5)$$

Legea lui Coulomb este valabilă doar pentru sarcini punctiforme (cum sunt, de pildă, cele purtate de particulele elementare), de aceea în punctele geometrice în care se află sarcinile noțiunea de densitate își pierde sensul. Pentru a putea utiliza acest concept și în cazul sarcinilor punctiforme, vom face apel la distribuția (funcțională)  $\delta$ , introdusă de P.A.M. Dirac (vezi Anexa E). Densitatea sarcinii punctiforme  $q$ , aflată în punctul  $P_o(\mathbf{r}_o)$ , se va scrie atunci

$$\rho(\mathbf{r}) = q \, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o). \quad (1.6)$$

Într-adevăr, integrând pe domeniul tridimensional  $D$ , de volum  $V$ , cu  $P_o \in D$ , avem :

$$\int_D \rho(\mathbf{r}) \, d\tau = q \int_D \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) = q.$$

Densitatea unui sistem discret de  $n$  sarcini punctiforme va fi

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n q_i \, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (1.7)$$

Forța coulombiană dintre o sarcină punctiformă  $q$  și un corp ce ocupă domeniul tridimensional  $D$ , electrizat în mod continuu cu sarcina electrică de densitate  $\rho$ , se obține împărțind corpul în domenii elementare de volum  $d\tau'$  și sarcină  $dq'$ , apoi integrând forța elementară dintre  $q$  și  $dq'$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \int_D \frac{\rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\tau', \quad (1.8)$$

unde  $\mathbf{r}$  este vectorul de poziție al sarcinii  $q$ .

### §1.3. Câmpul electrostatic

Dacă asupra unui corp electrizat, plasat într-un domeniu spațial, se exercită o forță de natură electrică, spunem că în acel domeniu există un *câmp electric*. Un câmp electric ce nu variază în timp se numește *staționar* sau *electrostatic*.

Câmpul electrostatic se caracterizează prin *intensitatea* sa  $\mathbf{E}$  care, prin definiție, este raportul dintre forța  $\mathbf{F}$  ce se exercită asupra unei sarcini de probă pozitive, așezate în câmp, și mărimea  $q'$  a acestei sarcini, adică :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}}{q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} q \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (1.9)$$

în care sarcina  $q$ , care creează câmpul, se găsește în punctul  $P'(\mathbf{r}')$ . Dacă sarcina  $q$  se află în originea coordonatelor, avem

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} q \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (1.10)$$

Pentru  $n$  sarcini punctiforme, intensitatea  $\mathbf{E}$  a câmpului în punctul  $P(\mathbf{r})$  se va scrie

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_{i=1}^n q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}. \quad (1.11)$$

Dacă sarcina electrică este distribuită în mod continuu, atât în volumul cât și pe suprafața unui corp, câmpul acesteia în punctul  $P(\mathbf{r})$

va fi

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left[ \int_V \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\tau' + \int_S \sigma(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS' \right]. \quad (1.12)$$

**Linii de câmp.** Fie curba  $C$  dată parametric prin ecuațiile  $x_i = x_i(s) (i = \overline{1, n})$ . Dacă în fiecare punct al curbei  $C$  câmpul  $\mathbf{E}$  este tangent la aceasta, curba se numește *linie a câmpului*  $\mathbf{E}$ . (Definiția este valabilă pentru orice câmp vectorial). Liniile câmpului electrostatic se mai numesc *linii de forță*.

Dacă notăm prin  $d\mathbf{s}$  un element orientat al liniei de câmp, din definiție rezultă  $d\mathbf{s} \times \mathbf{E} = 0$ , sau în proiecție pe axele unui triedru cartezian ortogonal  $Oxyz$  :

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}, \quad (1.13')$$

adică *ecuațiile diferențiale* ale liniilor câmpului electrostatic, în coordonate carteziane. În coordonate sferice, ecuațiile diferențiale ale liniilor de câmp vor fi

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r d\theta}{E_\theta} = \frac{r \sin \theta d\phi}{E_\phi}. \quad (1.13'')$$

Dacă sistemul (1.13) admite o soluție unică, prin fiecare punct al domeniului considerat trece o singură linie de câmp. Prin convenție, se admite că sensul liniilor de câmp este dat de sensul câmpului.

#### §1.4. Fluxul câmpului electrostatic

Prin definiție, *fluxul câmpului*  $\mathbf{E}$  prin suprafața  $S$  este

$$\Phi_e = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S E_n dS, \quad (1.14)$$

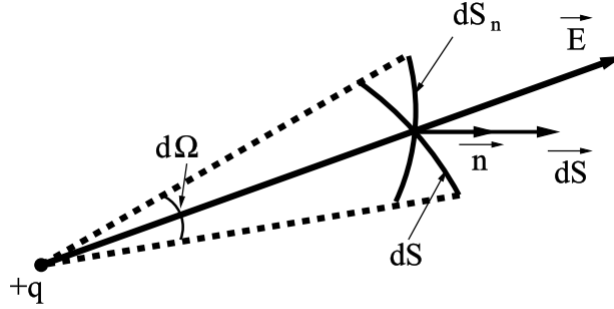
în care  $\mathbf{n}$  este versorul normalei la  $d\mathbf{S}$ . În cazul sarcinii punctiforme, relația (1.10) ne permite să scriem

$$\Phi_e = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \int_S \frac{1}{r^3} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \int_S \frac{dS \cos \alpha}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \int_S d\Omega, \quad (1.15)$$

unde  $d\Omega$  este unghiul solid elementar sub care se vede elementul de suprafață  $dS$  din punctul în care se află sarcina  $q$  (Fig.1.2). Dacă suprafața  $S$  este închisă,  $\oint d\Omega$  este egală cu  $4\pi$  sau zero, după cum sarcina  $q$  se găsește în interiorul suprafeței, respectiv în exteriorul ei. Din (1.15) deducem așadar

$$\Phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} \frac{q}{\epsilon_o} & \text{dacă } q \text{ este interior lui } S \\ 0 & \text{dacă } q \text{ este exterior lui } S \end{cases} \quad (1.16)$$

relație ce exprimă *teorema lui Gauss* sub formă integrală.



**Fig. 1.2.**

Pentru cazul distribuției discrete a  $n$  sarcini punctiforme în interiorul suprafeței  $S$ , teorema lui Gauss se scrie

$$\Phi_e = \frac{1}{\epsilon_o} \sum_{i=1}^n q_i, \quad (1.17)$$

iar pentru o distribuție continuă în domeniul tridimensional  $D$ , al cărui volum este  $V$

$$\Phi_e = \frac{1}{\epsilon_o} \int_V \rho \, d\tau. \quad (1.18)$$

Aplicând teorema Green-Gauss-Ostrogradski (A.29), găsim

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} \, d\tau,$$

prin urmare, ținând seama de (1.18), avem

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_o} \rho, \quad (1.19)$$

relație ce exprimă *teorema lui Gauss sub formă diferențială*.

Să notăm  $\mathbf{D} = \epsilon_o \mathbf{E}$ , câmp numit *inducție electrică a vidului*. Cu ajutorul acestuia, teorema lui Gauss (1.19) se mai scrie sub forma

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho. \quad (1.19')$$

Din (1.19) rezultă că  $\operatorname{div} \mathbf{E} \neq 0$  în punctele unde  $\rho \neq 0$ . Aceste puncte se numesc *surse* ale câmpului electric. Sursele pot fi pozitive ( $\rho > 0$ ) sau negative ( $\rho < 0$ ). În concluzie, câmpul electrostatic este un câmp cu surse, acestea fiind chiar sarcinile electrice.

### §1.5. Potențialul câmpului electrostatic

Fie dat câmpul vectorial  $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ . Dacă există o funcție scalară  $\phi(\mathbf{r}, t)$ , astfel încât să putem scrie

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}, t) = - \operatorname{grad} \phi(\mathbf{r}, t),$$

spunem că  $\mathbf{a}$  este un câmp *potențial*, iar  $\phi(\mathbf{r}, t)$  se numește *potențialul câmpului*. Dacă  $\phi$  nu depinde explicit de timp, câmpul  $\mathbf{a}$  se numește *conservativ*.

Un astfel de câmp este, de pildă, câmpul electrostatic al unei sarcini punctiforme. Într-adevăr, admitând că sarcina  $q$  se află în origine, putem scrie:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} q \frac{\mathbf{r}}{r^3} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_o} q \nabla \frac{1}{r} = - \nabla \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q}{r} \right).$$

Dacă introducem notația

$$\mathcal{N}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q}{r}, \quad (1.20)$$

din relația precedentă evem

$$\mathbf{E} = - \nabla \mathcal{N}. \quad (1.21)$$

Relația (1.20) definește potențialul câmpului produs de sarcina punctiformă  $q$ , aflată în vid, într-un punct aflat la distanța  $r$  de sarcina  $q$ , iar (1.21) exprimă legătura dintre intensitatea câmpului electrostatic  $\mathbf{E}$  și potențialul  $\mathcal{N}$  al acestuia.

Dacă sarcina se află în punctul  $P'$ , definit prin vectorul de poziție  $\mathbf{r}'$ , atunci în punctul  $P(\mathbf{r})$  potențialul va fi

$$\mathcal{N}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1.22)$$

Potențialul creat în  $P(\mathbf{r})$  de  $n$  sarcini punctiforme  $q_1, q_2, \dots, q_n$  va fi

$$\mathcal{N}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}, \quad (1.23)$$

iar cel creat de o distribuție continuă de sarcină (un corp electrizat) se va scrie

$$\mathcal{N}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left[ \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') d\tau'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \oint_S \frac{\sigma(\mathbf{r}') dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right]. \quad (1.24)$$

Utilizând relația (1.21) și observând că operatorul  $\nabla$  se aplică numai mărimilor ce depind de  $\mathbf{r}$ , se constată cu ușurință că aplicând relației (1.24) operatorul  $-\nabla$  se obține câmpul  $\mathbf{E}$  exprimat de (1.12).

Să calculăm circulația câmpului  $\mathbf{E}$  de-a lungul conturului închis  $C$ .  
Avem :

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \oint_C \nabla \mathcal{N} \cdot d\mathbf{l} = - \oint_C d\mathcal{N} = 0, \quad (1.25)$$

căci integrala, pe un contur închis, dintr-o diferențială totală exactă este zero. Aplicând în (1.25) teorema Stokes-Ampère (A.31), obținem

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

adică în fiecare punct al câmpului electrostatic

$$rot \mathbf{E} = 0, \quad (1.26),$$



relație ce reprezintă o altă modalitate de exprimare a caracterului conservativ al câmpului electrostatic. Un câmp cu proprietatea (1.26) se numește *irotațional* sau *fără vârtējuri*.

Să exprimăm din nou circulația câmpului  $\mathbf{E}$ , de data aceasta luată între două puncte  $A$  și  $B$  ale unui contur oarecare:

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_A^B d\mathcal{N} = \mathcal{N}_A - \mathcal{N}_B. \quad (1.27)$$

Dar integrala din membrul stâng este numeric egală cu lucrul mecanic efectuat de forțele electrice pentru a deplasa sarcina  $+1$  din  $A$  în  $B$  :

$$L = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (1.28)$$

prin urmare din (1.27) deducem

$$\mathcal{N}_A = \mathcal{N}_B + \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.29)$$

În timp ce diferența de potențial  $\mathcal{N}_A - \mathcal{N}_B$  este determinată în mod unic (câmpul  $\mathbf{E}$  este determinat de distribuția sarcinilor, iar circulația nu depinde de drum), nu același lucru se poate afirma despre potențialul în punctul  $A$ . Pentru a determina în mod unic potențialul în  $A$ , deplasăm punctul  $B$  la  $\infty$  și alegem  $\mathcal{N}(\infty) = 0$ . Avem așadar

$$\mathcal{N}_A = \int_A^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (1.30)$$

relație prin care se definește potențialul într-un punct al câmpului electrostatic. Din (1.30) rezultă că potențialul în punctul  $A$  este numeric egal cu lucrul mecanic efectuat de forțele electrice pentru a deplasa unitatea de sarcină pozitivă din acel punct la infinit.

Potențialul într-un punct  $P(\mathbf{r})$  al câmpului creat de o sarcină punctiformă, aflată în originea coordonatelor, va fi atunci

$$\mathcal{N}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \int_r^\infty \frac{1}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{l}.$$

Dar  $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{l} = r \, dl \, \cos(\mathbf{r}, d\mathbf{l}) = r \, dr$ , prin urmare

$$\mathcal{N}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} q \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} q \frac{1}{r}, \quad (1.31)$$

sau, dacă sarcina este plasată în punctul  $P'(\mathbf{r}')$ :

$$\mathcal{N}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} q \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1.32)$$

Din considerațiile de mai sus rezultă, între altele, că energia potențială a sarcinii punctiforme  $q$ , plasată în câmpul electrostatic  $\mathbf{E}$ , este

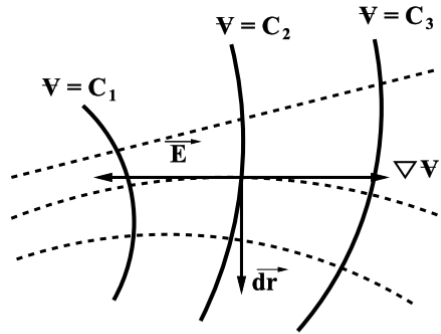
$$W_e = -q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q (\mathcal{N}_B - \mathcal{N}_A). \quad (1.33)$$

**Suprafețe echipotențiale.** Fie

$$\mathcal{N}(x, y, z) = \mathcal{N}_o = \text{const.}$$

o suprafață staționară. Prin diferențiere, obținem :

$$d\mathcal{N} = \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x_i} dx_i = \nabla \mathcal{N} \cdot d\mathbf{r} = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (1.34)$$



**Fig. 1.3.**

Cum  $d\mathbf{r}$  se găsește în planul tangent la suprafața  $\mathcal{N}_o$ , din (1.34) rezultă că în fiecare punct al suprafeței vectorul  $\mathbf{E}$  are direcția normalei

la suprafață. Dând valori constantei  $V_o$ , obținem o familie de suprafețe, numite *suprafețe echipotențiale* sau *suprafețe de nivel*. Altfel spus, prin *suprafață echipotențială* înțelegem locul geometric al punctelor în care potențialul are aceeași valoare.

Din (1.34) deducem că liniile câmpului electrostatic au direcția normalei la suprafața echipotențială în fiecare punct al câmpului. Familia liniilor de câmp este, așadar, ortogonală la familia suprafețelor echipotențiale (Fig.1.3).

Forma suprafețelor echipotențiale depinde de forma geometrică a sarcinii care creează câmpul. De pildă, din (1.20) deducem că suprafețele echipotențiale ale câmpului unei sarcini punctiforme sunt  $r = \text{const.}$ , ceea ce reprezintă geometric niște sfere concentrice cu sarcina  $q$  în centrul comun.

### Ecuatiile potențialului electrostatic

a) **Forma diferențială.** Din teorema lui Gauss (1.19) și relația (1.21), utilizând totodată formula (A.47), deducem:

$$\Delta \mathcal{V} = - \frac{1}{\epsilon_o} \rho, \quad (1.35)$$

ecuație cu derivate parțiale de ordinul al doilea, neomogenă, de tip eliptic, numită *ecuația lui Poisson*. În regiunile unde lipsesc sarcinile ( $\rho = 0$ ), ecuația (1.35) trece în *ecuația lui Laplace*

$$\Delta \mathcal{V} = 0. \quad (1.36)$$

Soluțiile ecuației lui Laplace se numesc *funcții armonice*. În afara sarcinilor electrice potențialul electrostatic este, așadar, o funcție armonică. Din (1.36) rezultă, între altele, că  $\mathcal{V}$  trebuie să fie o funcție continuă, împreună cu derivatele sale de primele două ordine, într-un anumit domeniu tridimensional  $D$ , inclusiv pe frontiera domeniului.

Rezolvând ecuația lui Poisson (sau, după caz, a lui Laplace), determinăm potențialul  $\mathcal{V}$ , prin urmare și câmpul ( $\mathbf{E} = -\nabla \mathcal{V}$ ).

Ecuația lui Poisson pentru o singură sarcină punctiformă, în virtutea lui (1.6), se va scrie

$$\Delta \mathcal{V} = - \frac{1}{\epsilon_o} q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1.37)$$

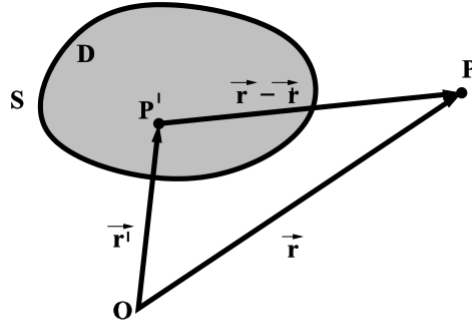
iar pentru  $n$  sarcini punctiforme

$$\Delta \mathcal{V} = - \frac{1}{\epsilon_o} \sum_{i=1}^n q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (1.38)$$

Ecuatia lui Poisson în domeniul tridimensional  $D$ , completată cu condițiile la limită pe suprafața  $S$  ce mărginește domeniul  $D$ , determină în mod unic câmpul scalar  $\mathcal{V}(\mathbf{r})$  în tot domeniul  $D$ .

b) **Forma integrală.** Cu ajutorul identității a doua a lui Green (A.38), se pot găsi *reprezentările integrale* ale ecuației lui Poisson, respectiv a lui Laplace. Înlocuind în (1.37) potențialul  $\mathcal{V}$  al câmpului sarcinii punctiforme  $q$  prin expresia (1.32) și simplificând prin  $q \neq 0$ , obținem

$$\Delta \left( \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (1.39)$$



**Fig. 1.4.**

Utilizând această relație, să aplicăm operatorul  $\Delta$  expresiei ce dă potențialul unei distribuții continue de sarcină electrică (1.24). Ținând seama de (E.19), avem:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{V}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_V \rho(\mathbf{r}') \Delta \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\tau' = \\ &= - \frac{1}{\epsilon_o} \int_V \rho(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\tau' = - \frac{1}{\epsilon_o} \rho(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (1.40)$$

adică ecuația lui Poisson.

Să admitem că sarcina este distribuită în mod continuu în interiorul domeniului tridimensional  $D$ , inclusiv pe frontiera  $S$  a acestuia și că în  $D$  putem defini două funcții  $\phi(\mathbf{r})$  și  $\psi(\mathbf{r})$ , continue și derivabile, fără singularități. Avem atunci (vezi A.38 și Fig.1.4) :

$$\int_V (\phi \Delta' \psi - \psi \Delta' \phi) d\tau' = \oint_S \left( \phi \frac{\partial \psi}{\partial n'} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n'} \right) dS', \quad (1.41)$$

unde  $d\tau'$  este un element de volum din  $D$ , iar  $dS'$  un element al suprafeței  $S$ .

Dacă alegem

$$\phi(\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right); \quad \psi(\mathbf{r}') = \mathcal{N}(\mathbf{r}'), \quad (1.42)$$

atunci (1.41) conduce la

$$\begin{aligned} \int_V \left[ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \Delta' \mathcal{N}(\mathbf{r}') - \mathcal{N}(\mathbf{r}') \Delta' \left( \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right] d\tau' = \\ \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial \mathcal{N}(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \mathcal{N}(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right] dS'. \end{aligned}$$

Observând că

$$\begin{aligned} \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) &= -\nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right), \\ \nabla \cdot \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) &= \Delta \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\nabla \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \\ &= -\nabla' \cdot \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \nabla' \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \Delta' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \end{aligned} \quad (1.43)$$

și având în vedere relațiile (1.35) și (1.39), mai putem scrie :

$$\int_V \left[ - \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}') + \mathcal{N}(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right] d\tau' =$$

$$\frac{1}{4\pi} \oint \left[ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial \mathcal{N}(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \mathcal{N}(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right] dS',$$

de unde, ținând seama de proprietatea de filtraj a distribuției  $\delta$  (vezi E.19) :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial \mathcal{N}(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \mathcal{N}(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right] dS', \end{aligned} \quad (1.44)$$

care este *reprezentarea integrală a ecuației lui Poisson*.

Dacă în domeniul  $D$  nu avem o distribuție spațială de sarcină electrică ( $\rho = 0$ ), din (1.44) deducem *reprezentarea integrală a ecuației lui Laplace* :

$$\mathcal{N}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial \mathcal{N}(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \mathcal{N}(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right] dS'. \quad (1.45)$$

Dacă extindem domeniul de integrare asupra întregului spațiu tridimensional, sarcinile rămânând însă situate într-o regiune finită și utilizăm condiția  $\mathcal{N}(\infty) = 0$ , integrala de suprafață din (1.44) se anulează și rămâne

$$\mathcal{N}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau',$$

după cum era de așteptat. Pentru a arăta că integrala se extinde asupra întregului spațiu, nu am mai indicat domeniul de integrare. Această convenție va fi utilizată și în cele ce urmează.

Utilizând *condițiile Dirichlet-Neumann* pe suprafața frontieră  $S$ , putem transcrie ecuațiile (1.44) și (1.45) cu ajutorul *funcției Green*  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  (vezi Anexa F). Prin definiție, funcția Green a problemei noastre  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  este soluția ecuației

$$\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (1.46)$$

Comparând (1.46) cu (1.39), deducem că  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  este de forma

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \eta(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (1.47)$$

unde  $\eta(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  este o soluție a ecuației lui Laplace în interiorul domeniului  $D : \Delta\eta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ .

Din (1.44) și (1.45) avem atunci

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\epsilon_o} \int_V \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\tau' + \\ &+ \oint_S \left[ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \mathcal{N}(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \mathcal{N}(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \right] dS' \quad (\rho \neq 0), \end{aligned} \quad (1.48)$$

respectiv

$$\mathcal{N}(\mathbf{r}) = \oint_S \left[ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \mathcal{N}(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \mathcal{N}(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \right] dS' \quad (\rho = 0). \quad (1.49)$$

Prin urmare, pentru a determina  $\mathcal{N}(\mathbf{r})$  trebuie să cunoaștem funcțiile  $\mathcal{N}(\mathbf{r})$  și  $\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial n}$  pe suprafața frontieră  $S$ . Cum, însă, teorema de existență și unicitate cere cunoașterea numai a uneia dintre aceste funcții, vom face apel la condițiile Dirichlet, respectiv Neumann pe  $S$ , alegând

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Big|_S = 0 \quad \text{pentru problema } \textit{Dirichlet}; \quad (1.50)$$

$$\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \Big|_S = C \text{ (const.)} \quad \text{pentru problema } \textit{Neumann}. \quad (1.51)$$

Ultima condiție se justifică după cum urmează. Integrând (1.46) pe un domeniu tridimensional și apelând la definiția distribuției delta, avem

$$\int_V \nabla' \cdot \nabla' G d\tau' = \oint_S \nabla' G \cdot d\mathbf{S}' = \oint \frac{\partial G}{\partial n'} dS' = -1. \quad (1.52)$$

Se observă că singura alegere compatibilă cu ultima relație este (1.51), ceea ce conduce la  $C = \frac{1}{S}$ , unde  $S$  este suprafața ce mărginește volumul de integrare. În acest caz,

$$\langle \mathcal{N} \rangle = \frac{1}{S} \oint_S \mathcal{N}(\mathbf{r}') dS' \quad (1.53)$$

va fi valoarea medie a potențialului pe  $S$ . Reprezentările integrale ale ecuației Poisson, pentru condițiile Dirichlet, respectiv Neumann, sunt așadar:

$$\mathcal{N}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_o} \int_V \rho(\mathbf{r}') G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\tau' - \oint_S \mathcal{N}(\mathbf{r}') \frac{\partial G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} dS'; \quad (1.54)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{r}) = & \frac{1}{\epsilon_o} \int_V \rho(\mathbf{r}') G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\tau' + \\ & + \oint_S G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \mathcal{N}(\mathbf{r}')}{\partial n'} dS' + \langle V \rangle. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Cu totul asemănător se scriu reprezentările integrale ale ecuației Laplace pentru cele două condiții.

În cazurile concrete, aflarea funcției Green corespunzătoare problemei studiate se realizează cu dificultate. Din acest motiv, au fost elaborate diverse metode speciale de integrare a ecuației Poisson, respectiv Laplace: metoda imaginilor electrice, metoda dezvoltării potențialului în serie de funcții ortogonale, metoda funcțiilor conjugate etc. Asupra acestor metode vom reveni.

### §1.6. Energia câmpului electrostatic

Lucrul mecanic necesar pentru a aduce o sarcină punctiformă  $+q$  de la infinit până în punctul A al unui câmp electrostatic, unde potențialul este  $\mathcal{N}(A)$ , se efectuează împotriva forțelor electrice, prin urmare el se transformă în energie potențială acumulată de sarcina  $+q$ :

$$W_e^{pot}(A) = q \mathcal{N}(A). \quad (1.56)$$

Utilizând această relație, să calculăm energia de interacțiune a două sarcini punctiforme  $q_1$  și  $q_2$ , aflate în vid, la distanța  $r$  una de alta. Pentru a aduce sarcina  $q_1$  de la  $\infty$  în punctul A, în absența lui  $q_2$ , nu se efectuează lucru mecanic. În urma aducerii lui  $q_2$  în B, la distanța  $r$  de A,  $q_1$  fiind deja în A, se efectuează lucrul mecanic  $W_e^1 = q_2 \mathcal{N}_2$ , unde  $\mathcal{N}_2$  este potențialul câmpului sarcinii  $q_1$  în B. Raționând în mod similar, pentru a aduce  $q_1$  în A, în condiția că sarcina  $q_2$  este în B, se cheltuiește



lucrul mecanic  $W_e^2 = q_1 \mathcal{N}_1$ , unde  $\mathcal{N}_1$  este potențialul câmpului lui  $q_2$  în A. Cum

$$\mathcal{N}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q_2}{r}; \quad \mathcal{N}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q_1}{r},$$

rezultă

$$W_e^1 = W_e^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q_1 q_2}{r}. \quad (1.57)$$

Notând cu  $W_e$  valoarea comună  $W_e^1 = W_e^2$ , mai putem scrie

$$W_e = \frac{1}{2}(W_e^1 + W_e^2) = \frac{1}{2} (q_1 \mathcal{N}_1 + q_2 \mathcal{N}_2). \quad (1.58)$$

Generalizând această relație pentru  $n$  sarcini  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , avem

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \mathcal{N}_i, \quad (1.59)$$

unde  $\mathcal{N}_i$  este potențialul sarcinilor  $q_k (k \neq i)$  în punctul unde se află  $q_i$ :

$$\mathcal{N}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_{k \neq i} \frac{q_k}{r_{ik}}, \quad (1.60)$$

$r_{ik}$  fiind distanța dintre sarcinile  $q_i$  și  $q_k$ . Prin urmare,

$$W_e = \frac{1}{8\pi\epsilon_o} \sum_{i,k=1}^n \frac{q_i q_k}{r_{ik}} \quad (i \neq k). \quad (1.61)$$

Dacă sarcinile sunt distribuite în mod continuu într-un domeniu tridimensional sau pe o suprafață, energia de interacțiune se va scrie

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho \mathcal{N} d\tau, \quad \text{respectiv} \quad W_e = \frac{1}{2} \int_S \sigma \mathcal{N} dS. \quad (1.62)$$

Energia câmpului electrostatic se poate exprima și sub o altă formă, ce conține intensitatea câmpului  $\mathbf{E}$ . Admițând că sarcinile sunt distribuite în mod continuu în domeniul tridimensional finit  $D$ , de volum

$V$ , inclusiv pe frontiera  $S$  a acestuia și utilizând legea lui Gauss (1.19) și formulele (A.29) și (A.40), avem:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho \mathcal{N} d\tau = \frac{\epsilon_o}{2} \int_V \mathcal{N} \nabla \cdot \mathbf{E} d\tau = \frac{\epsilon_o}{2} \int_V \mathbf{E}^2 d\tau + \frac{\epsilon_o}{2} \oint_S \mathcal{N} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}.$$

Dacă extindem domeniul de integrare asupra întregului spațiu (sau, altfel spus, integrăm pe o sferă cu raza  $R \rightarrow \infty$  și observăm că  $\mathcal{N} E_n \rightarrow 0$  ca  $\frac{1}{R^3}$  iar  $dS \sim R^2$ ), integrala de suprafață tinde la zero și rezultă

$$W_e = \frac{\epsilon_o}{2} \int_V \mathbf{E}^2 d\tau = \frac{1}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} d\tau, \quad (1.63)$$

unde am utilizat notația cunoscută  $\mathbf{D} = \epsilon_o \mathbf{E}$  pentru inducția vidului.

Spre deosebire de relația (1.62), care arată că energia câmpului electrostatic este diferită de zero numai acolo unde  $\rho \neq 0$  (respectiv  $\sigma \neq 0$ ), deci numai în punctele unde există sarcini, expresia (1.63) ne spune că  $W_e \neq 0$  și acolo unde nu avem sarcini, dar avem un câmp  $\mathbf{E} \neq 0$ . Prin urmare câmpul electrostatic este purtător de energie, aceasta fiind localizată în câmp.

O altă deosebire esențială între expresiile (1.62) și (1.63) constă în aceea că, potrivit lui (1.62), energia poate fi pozitivă sau negativă, după semnul sarcinilor, în timp ce (1.63) exprimă faptul că energia nu poate lua valori negative ( $\mathbf{E}^2 > 0$ ). Mai mult, potrivit lui (1.61), energia unei sarcini punctiforme este nulă, pe când (1.63) ne spune că aceeași energie este infinită. Deosebirea decurge din faptul că în (1.61) nu se ține seama de interacțiunea dintre sarcini și propriul lor câmp, în timp ce (1.63) exprimă tocmai *energia proprie* a sarcinii.

Să calculăm energia totală a câmpului electrostatic produs de două sarcini punctiforme  $q_1$  și  $q_2$ . Dacă fiecare sarcină în parte produce câmpul  $\mathbf{E}_1$ , respectiv  $\mathbf{E}_2$ , avem  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ , deci

$$W_e = \frac{\epsilon_o}{2} \int \mathbf{E}^2 d\tau = \frac{\epsilon_o}{2} \int \mathbf{E}_1^2 d\tau + \frac{\epsilon_o}{2} \int \mathbf{E}_2^2 d\tau + \epsilon_o \int \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 d\tau.$$

Primii doi termeni dau energiile proprii ale sarcinilor  $q_1$ , respectiv  $q_2$ , iar ultimul termen exprimă *energia lor mutuală*. În consecință, energia electrostatică nu se bucură de proprietatea de aditivitate.

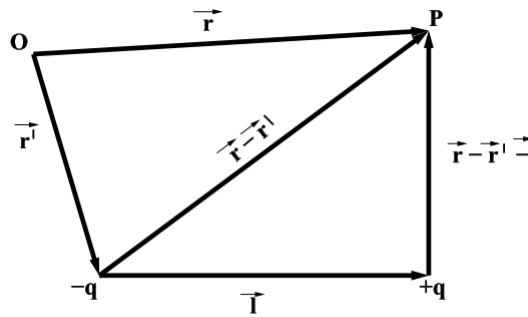
Din  $(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)^2 \geq 0$  rezultă  $\mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2 \geq 2(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2)$ , adică energia proprie a sarcinilor este totdeauna mai mare sau cel puțin egală cu energia lor mutuală, aceasta din urmă putând fi pozitivă sau negativă.

### §1.7. Dipolul electric

Prin *dipol* înțelegem un sistem de două sarcini electrice punctiforme, egale și de semn contrar, aflate la distanța  $l$  una de alta, neglijabilă față de distanța de la dipol până la punctul în care se determină acțiunea sarcinilor.

Potențialul câmpului unui astfel de sistem, potrivit lui (1.22) și figurii 1.5, va fi :

$$\mathcal{N}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{l}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right).$$



**Fig. 1.5.**

Luând în considerație ipoteza ( $|\mathbf{l}| \ll |\mathbf{r}|$ ) și dezvoltând în serie primul termen, avem

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{l}|^{-1} &= \left[ (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 - 2\mathbf{l} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \mathbf{l}^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left[ 1 - \frac{2\mathbf{l} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} + \frac{\mathbf{l}^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right]^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left[ 1 + \frac{\mathbf{l} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} + \dots \right] \simeq \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \mathbf{l} \cdot \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right), \end{aligned}$$

în care am neglijat termenii ce conțin  $l^2$ ,  $l^3$  etc. Potențialul se va scrie, așadar, sub forma

$$\mathcal{N}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o} \mathbf{p} \cdot \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (1.64)$$

unde, prin definiție, vectorul  $\mathbf{p} = q \mathbf{l}$  se numește *moment electric dipolar*.

Pentru necesitățile calculului infinitesimal se introduce noțiunea de *dipol punctiform*, al cărui moment se definește prin

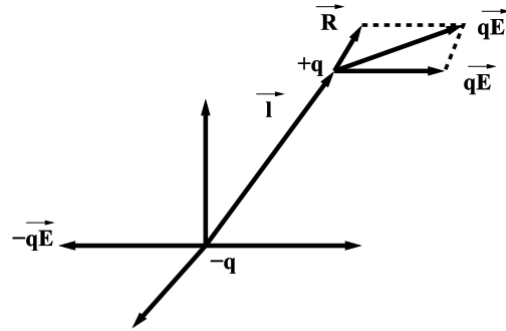
$$\mathbf{p} = \lim_{l \rightarrow 0, q \rightarrow \infty} (q\mathbf{l}). \quad (1.65)$$

Intensitatea câmpului electric al dipolului se determină făcând apel la relațiile (1.21) și (A.51). Avem :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla \mathcal{N} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o} \nabla \left[ \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left\{ \frac{3[\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} - \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right\}, \end{aligned}$$

sau, dacă alegem originea coordonatelor în dipolul presupus punctiform,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left[ \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right]. \quad (1.66)$$



**Fig. 1.6.**

Admițând că dipolul se găsește într-un câmp electric neuniform, să calculăm rezultanta  $\mathbf{R}$  a forțelor ce acționează asupra dipolului din

partea câmpului. Din Fig.1.6 se observă că

$$\mathbf{R} = q (\mathbf{E}' - \mathbf{E}). \quad (1.67)$$

Dezvoltând  $\mathbf{E}'$  în serie Mac Laurin, avem:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) + (\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{E} + \dots$$

Limitându-ne la termenul liniar în  $\mathbf{l}$  și introducând acest rezultat în (1.67), avem

$$\mathbf{R} = q (\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{E}. \quad (1.68)$$

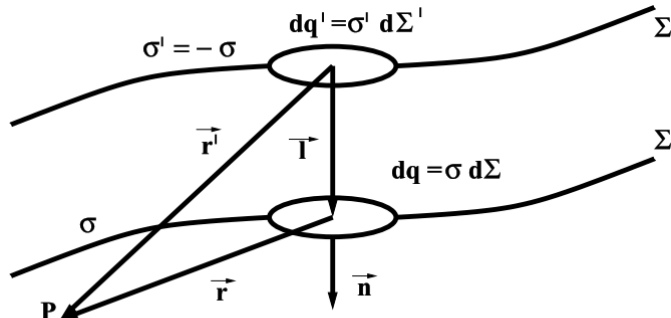
Așadar, dipolul se va roti sub acțiunea cuplului  $-q\mathbf{E}$ ,  $+q\mathbf{E}$  și se va deplasa în direcția axei sale. Dacă  $\mathbf{E}$  este un câmp omogen, avem  $\mathbf{R} = 0$ , prin urmare acțiunea câmpului se reduce la un cuplu de forțe, de moment

$$\mathcal{M} = \mathbf{l} \times q\mathbf{E} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}. \quad (1.69)$$

În câmpul exterior, dipolul va avea energia

$$W_e = q \mathcal{N}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - q \mathcal{N}\mathbf{r} \simeq q\mathbf{l} \cdot \nabla \mathcal{N} = \mathbf{p} \cdot \nabla \mathcal{N} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}. \quad (1.70)$$

**Stratul dublu.** Un număr mare de dipoli cu momentele alăturate, paralele și de același sens formează un *strat dublu*. Potențialul câmpului unui astfel de sistem, într-un punct  $P$ , este (vezi Fig.1.7):



**Fig. 1.7.**

$$\mathcal{N}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left[ \int_{\Sigma} \frac{\sigma dS}{r} + \int_{\Sigma'} \frac{\sigma' dS'}{r'} \right].$$

Distanța dintre suprafețele  $\Sigma$  și  $\Sigma'$  fiind mică, vom integra pe o suprafață mediană  $S$ . Observând că

$$\frac{1}{r'} \simeq \frac{1}{r} + \mathbf{l} \cdot \nabla \left( \frac{1}{r} \right), \quad (1.71)$$

potențialul în  $P$  se va scrie

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(P) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_S \sigma \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) dS = \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_S \sigma l \mathbf{n} \cdot \nabla \left( \frac{1}{r} \right) dS. \end{aligned}$$

Având în vedere că

$$-\mathbf{n} \cdot \nabla \left( \frac{1}{r} \right) dS = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS = \frac{dS \cos \alpha}{r^2} = d\Omega$$

și definind *putința* sau *momentul stratului dublu* prin  $\tau_e = \sigma l$ , obținem în sfârșit

$$\mathcal{N}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_S \tau_e d\Omega. \quad (1.72)$$

Dacă stratul dublu este omogen,  $\tau_e = \text{const.}$  și avem

$$\mathcal{N}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \tau_e \Omega. \quad (1.73)$$

Din (1.73) rezultă că potențialul în interiorul unui strat dublu închis cu  $\tau_e = \text{const.}$  este  $\tau_e/\epsilon_o$  sau  $-\tau_e/\epsilon_o$ , după cum fața interioară este pozitivă sau negativă, iar în exteriorul acestuia este zero. Prin urmare, straturile duble electrice prezintă suprafețe de discontinuitate pentru funcția potențială.

### §1.8. Multipoli electrici

Un ansamblu de sarcini electrice de semne diferite, aflate la distanțe foarte mici unele de altele (în raport cu distanța până în punctul unde determinăm acțiunea sistemului), distribuite în mod discret sau continuu, formează un *multipol electric*. Prin definiție, un *multipol de ordinul*  $n$  este un sistem cu  $2^n$  poli, constituit din 2 multipoli de ordinul

$n - 1$ , sarcinile ocupând vârfurile unui sistem geometric spațial cu laturile  $l_1, l_2, \dots, l_n$  și având momentul definit prin

$$|\mathbf{p}^{(n)}| = n! \lim_{l_1, \dots, l_n \rightarrow 0; q \rightarrow \infty} (q l_1 l_2 \dots l_n). \quad (1.74)$$

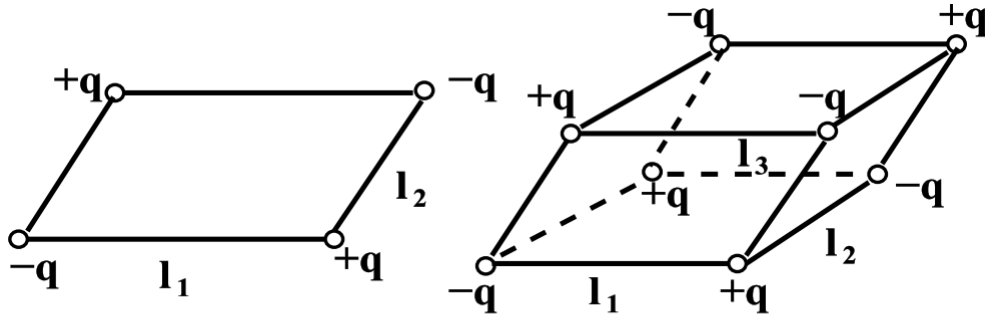
Dăm, mai jos, câteva exemple de multipol:

a) *Monopol* (multipol de ordinul zero), având o singură sarcină electrică.

b) *Dipol* (multipol de ordinul unu), de moment  $\mathbf{p}^{(1)} = \lim_{l \rightarrow 0, q \rightarrow \infty} (q \mathbf{l})$  (vezi paragraful precedent).

c) *Cvadrupol* (multipol de ordinul doi), format din doi dipoli opuși, paraleli, la distanțe mutuale mici (în sensul celor precizate mai sus), cu sarcinile situate în vârfurile unui paralelogram (Fig. 1.8), de moment

$$|\mathbf{p}^{(2)}| = 2! \lim_{l_1, l_2 \rightarrow 0, q \rightarrow \infty} (q l_1 l_2). \quad (1.75)$$



**Fig. 1.8.**

**Fig. 1.9.**

d) *Octupol* (multipol de ordinul trei), format din doi cvadrupoli opuși, paraleli, la distanțe mutuale foarte mici, cele 8 sarcini fiind plasate în vârfurile unui paralelipiped (Fig.1.9), de moment

$$|\mathbf{p}^{(3)}| = 3! \lim_{l_1, l_2, l_3 \rightarrow 0, q \rightarrow \infty} (q l_1 l_2 l_3). \quad (1.76)$$

### Potențialele unei distribuții continue de sarcini electrice staționare

Considerăm o distribuție continuă de sarcini (în cazul unei distribuții discrete, problema se tratează cu totul similar, integralele fiind înlocuite prin sume) într-un domeniu tridimensional  $D$ , de volum  $V$ , mărginit de suprafața frontieră  $S$ . Potențialul câmpului electrostatic al distribuției, în punctul  $P(\mathbf{r})$  este, după cum știm (vezi Fig. 1.4) :

$$\mathcal{N}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') d\tau'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1.77)$$

Alegând originea  $O$  într-un punct oarecare din  $D$  și admitând că  $|\mathbf{r}'| \gg |\mathbf{r}|$ , vom dezvolta în serie cantitatea  $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ . Avem :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{r} - \frac{x'_i}{1!} \frac{\partial}{\partial x'_i} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{2!} x'_i x'_k \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left( \frac{1}{r} \right) - \dots = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} (\mathbf{r}' \cdot \nabla)^{(l)} \left( \frac{1}{r} \right). \end{aligned} \quad (1.78)$$

Din (1.77) rezultă atunci

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \int_V \rho(\mathbf{r}') (\mathbf{r}' \cdot \nabla)^{(l)} \left( \frac{1}{r} \right) d\tau' = \\ &= \mathcal{N}^{(0)} + \mathcal{N}^{(1)} + \mathcal{N}^{(2)} + \dots = \sum_{l=0}^{\infty} \mathcal{N}^{(l)}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (1.79)$$

unde am utilizat convenția sumării după indici repetați. Fie, prin definiție

$$p_i = \int_V \rho(\mathbf{r}') x'_i d\tau' \quad (1.80)$$

componentele vectorului numit *moment electric dipolar* al distribuției continue de sarcină electrică,

$$p_{ik} = \int_V \rho(\mathbf{r}') (3x'_i x'_k - r'^2 \delta_{ik}) d\tau' \quad (1.81)$$



componentele *momentului electric cuadripolar* al distribuției continue de sarcină electrică, exprimat printr-un tensor de ordinul doi, simetric și cu trasa nulă - ș.a.m.d. Forma tensorului (1.81) se obține scăzând în (1.79) termenul nul

$$r'^2 \delta_{ik} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left( \frac{1}{r} \right) = r'^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \left( \frac{1}{r} \right)_{r \neq 0} = 0.$$

În general, *momentul electric multipolar de ordinul  $2^l$*  se definește prin relația

$$p_{i_1 \dots i_l} = (l+1) \int_V \rho(\mathbf{r}') x'_{i_1} \dots x'_{i_l} d\tau', \quad (1.82)$$

ceea ce ne permite să scriem potențialul  $\mathcal{N}$  al distribuției sub forma

$$\mathcal{N}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(l+1)!} p_{i_1 \dots i_l} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_l} \left( \frac{1}{r} \right).$$

Termenii  $\mathcal{N}^{(0)}$ ,  $\mathcal{N}^{(1)}$ ,  $\mathcal{N}^{(2)}$  ... din (1.79) au, așadar, următoarea semnificație:

$$\mathcal{N}^{(0)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{Q}{r}$$

este *potențialul de monopol*, produs la distanța  $r$  de sarcina electrică  $Q = \int_V \rho(\mathbf{r}') d\tau'$ , aflată în origine;

$$\mathcal{N}^{(1)} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_o} p_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{r} \right) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \mathbf{p} \cdot \nabla \left( \frac{1}{r} \right)$$

este *potențialul de dipol* al distribuției (vezi 1.64), dipolul aflându-se în origine;

$$\mathcal{N}^{(2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{6} p_{ik} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{6} p_{ik} \left( \frac{3x_i x_k}{r^5} - \frac{\delta_{ik}}{r^3} \right)$$

este *potențialul de cuadripol* al distribuției, acesta aflându-se de asemenea în origine ș.a.m.d.

### Energia unei distribuții continue de sarcină electrică într-un câmp electrostatic exterior

Fie un sistem de  $n$  sarcini electrice distribuite discret în domeniul tridimensional  $D$ , plasate în câmpul electrostatic  $\mathbf{E}$ . Energia potențială a sarcinii  $q_k$  în locul unde potențialul este  $\mathcal{N}(\mathbf{r}_k)$ , este  $W_k = q_k \mathcal{N}(\mathbf{r}_k)$ , iar energia potențială totală (a sistemului de sarcini) este

$$W_e = \sum_k W_k = \sum_k q_k \mathcal{N}(\mathbf{r}_k).$$

Dacă distribuția de sarcină este continuă, formula de mai sus trece în

$$W_e = \int_V \rho(\mathbf{r}') \mathcal{N}(\mathbf{r}') d\tau'. \quad (1.83)$$

Dezvoltând  $\mathcal{N}(\mathbf{r}')$  în serie Taylor în jurul originii 0, aleasă într-un punct din  $D$ , avem

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{r}') &= \mathcal{N}(0) + x'_i \left( \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x_i} \right)_0 + \frac{1}{2} x'_i x'_k \left( \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial x_i \partial x_k} \right)_0 + \dots = \\ &= \mathcal{N}(0) - x'_i E_i(0) - \frac{1}{2} x'_i x'_k \left( \frac{\partial E_k}{\partial x_i} \right)_0 - \dots = \\ &= \mathcal{N}(0) - x'_i E_i(0) - \frac{1}{6} (3x'_i x'_k - r'^2 \delta_{ik}) \left( \frac{\partial E_k}{\partial x_i} \right)_0 + \dots \end{aligned}$$

unde se observă că am adăugat termenul nul

$$r'^2 \delta_{ik} \left( \frac{\partial E_k}{\partial x_i} \right)_0 = r'^2 (\operatorname{div} \mathbf{E})_0 = 0.$$

Înlocuind  $\mathcal{N}(\mathbf{r})$  în (1.83), obținem:

$$W_e = Q \mathcal{N}(0) - p_i E_i(0) - \frac{1}{6} p_{ik} \left( \frac{\partial E_k}{\partial x_i} \right)_0 + \dots = \sum_{l=0}^{\infty} W^{(l)}. \quad (1.84)$$

Din (1.84) deducem semnificația termenilor  $W^{(0)}$ ,  $W^{(1)}$ ,  $W^{(2)}$ , după cum urmează:

$W^{(0)} = Q \mathcal{V}(0)$  este energia potențială a distribuției, în ipoteza că întreaga sarcină este concentrată în originea  $O$ ;

$W^{(1)} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(0)$  este energia potențială dipolară a sistemului de sarcini (vezi 1.70), dipolul fiind în punctul  $O$ ;

$W^{(2)} = -\frac{1}{6} p_{ik} \left( \frac{\partial E_k}{\partial x_i} \right)_0$  este energia potențială de cuadrupol a distribuției de sarcină, cuadrupolul aflându-se, de asemenea, în origine etc.

Termenii  $W^{(0)}$ ,  $W^{(1)}$ ,  $W^{(2)}$ ... indică modul specific în care multipolii de diferite ordine interacționează cu câmpul exterior: sarcina cu potențialul câmpului, dipolii cu intensitatea câmpului, cuadrupolii cu gradientul câmpului ș.a.m.d.

Teoria multipolilor prezintă o deosebită importanță, atât în electrostatică (magnetostatică), cât și în teoria radiației multipolare, în diverse probleme de fizică nucleară, de fizică a solidului etc.

## PROBLEME

1. Să se calculeze câmpul produs de un cilindru circular drept, de rază  $R$  și lungime infinită, electrizat uniform, densitatea superficială de sarcină fiind  $\sigma$ .

2. Un disc circular, de rază  $R$ , este electrizat uniform ( $\sigma = \text{const.}$ ). Să se calculeze câmpul produs de disc, într-un punct oarecare de pe axul acestuia.

3. O sferă plină, de rază  $R$ , este electrizată uniform ( $\rho = \text{const.}$ ). Să se calculeze câmpul și potențialul în două puncte, unul interior și celălalt exterior sferei.

4. Să se determine forma suprafețelor echipotențiale ale câmpului unei distribuții liniare de sarcină de-a lungul unui fir rectiliniu, de lungime  $2c$ , electrizat uniform ( $\lambda = \text{const.}$ ).

5. Să se arate că momentul electric cuadrupolar al unei distribuții continue, omogene, de sarcină electrică cu simetrie axială are o singură componentă esențial distinctă. Să se calculeze potențialul de cuadrupol al distribuției.

6. O sferă conductoare de rază  $R$ , pe care este distribuită sarcina  $Q$ , se găsește în prezența sarcinii punctiforme exterioare  $+q$ . Să se determine :

a) Densitatea de sarcină  $\sigma$  pe sferă, în particular în punctele cel mai apropiat și cel mai îndepărtat de  $+q$ ;

b) Forța de interacțiune dintre sarcina sferei și sarcina punctiformă  $+q$ .

7. Să se calculeze componentele Fourier ale potențialului și câmpului electrostatic asociate unei sarcini punctiforme  $q$ .

8. Să se calculeze energia proprie a electronului în următoarele ipoteze:

a) Electronul este o sferă de rază  $R$ , cu sarcina distribuită uniform, superficial;

b) Sarcina electronului este distribuită uniform în volumul sferei de rază  $R$ ;

c) Electronul este o sarcină punctiformă.

9. Să se arate că energia de interacțiune dintre două sarcini punctiforme este egală cu energia lor mutuală.

10. Să se determine momentul electric cuadrupolar al unui elipsoid electrizat uniform în volum.

## B. Câmpul electrostatic în medii dielectrice polarizate

### §1.9. Polarizarea dielectricilor

Experimentul arată că un dielectric, introdus într-un câmp electric, se *polarizează*. Prin aceasta se înțelege formarea, sub acțiunea câmpului, a unor dipoli electrici în fiecare element de volum al corpului sau/și orientarea acestora (dipolii pot exista și în absența câmpului).

Pentru a studia polarizarea unui mediu dielectric se definește mărimea vectorială numită *intensitate de polarizare* sau *vectorul polarizare electrică* sau, încă, *polarizație*, prin relația:

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta\tau} = \frac{d\mathbf{p}}{d\tau}; \quad d\mathbf{p} = \mathbf{P} d\tau. \quad (1.85)$$

Utilizând această definiție, vom scrie potențialul creat de un domeniu tridimensional elementar al unei distribuții continue de dipoli electrici. Ținând seama de (1.64), avem :

$$d \mathcal{N}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o} \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}') d\tau',$$

prin urmare potențialul distribuției de dipoli din domeniul  $D$  va fi

$$\mathcal{N}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_V \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\tau'. \quad (1.86)$$

Folosind formula (A.40) și teorema Green-Gauss-Ostrogradski, mai putem scrie

$$\mathcal{N}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_V \frac{(-\nabla' \cdot \mathbf{P})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' + \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \oint_S \frac{P_n}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'. \quad (1.87)$$

Comparând această relație cu expresia (1.24) ce dă potențialul unei distribuții continue de sarcină electrică, repartizată atât spațial cât și superficial (un corp electrizat), putem scrie prin analogie

$$\mathcal{N}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left[ \int_V \frac{\rho_p(\mathbf{r}') d\tau'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \oint_S \frac{\sigma_p(\mathbf{r}') dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right], \quad (1.88)$$

unde  $\rho_p(\mathbf{r}')$  și  $\sigma_p(\mathbf{r}')$ , definite prin

$$\rho_p(\mathbf{r}') = -\nabla' \cdot \mathbf{P} ; \quad \sigma_p(\mathbf{r}') = P_n, \quad (1.89)$$

sunt *densitatea spațială* (respectiv *superficială*) de sarcină, apărute ca urmare a polarizării. Mai observăm că

$$Q = \int_V \rho_p d\tau' + \oint_S \sigma_p dS' = - \int_V \nabla' \cdot \mathbf{P} d\tau' + \oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}' = 0,$$

adică sarcina de polarizare totală este nulă.

Prin urmare, o distribuție continuă de dipoli, într-un domeniu finit, se comportă din punct de vedere al acțiunii electrostatice exterioare

domeniului, ca și o distribuție continuă de sarcini spațiale și superficiale fictive. Aceste sarcini fictive, care apar numai ca urmare și în timpul polarizării, se mai numesc *sarcini legate* (pentru a le distinge de cele libere).

### §1.10. Teorema lui Gauss relativă la medii dielectrice

Fie  $Q = q_1 + q_2 + \dots + q_n$  suma sarcinilor libere punctiforme existente într-un dielectric și  $Q_p$  sarcina de polarizare, apărută sub influența câmpului electric produs de sarcinile libere. Aplicând teorema lui Gauss (1.16) pentru o suprafață închisă  $S$  conținută în dielectric, avem

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_o} (Q + Q_p).$$

Dar

$$Q_p = \oint_{\Sigma} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} - \int_V \nabla \cdot \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S},$$

unde  $\Sigma$  este suma suprafețelor ce înconjoară fiecare dintre cele  $n$  sarcini  $q_1, \dots, q_n$ . Integrala de volum poate fi transformată în integrală de suprafață extinsă la suprafețele ce mărginesc domeniul  $D$ :

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{P} \cdot d\tau = \oint_{\Sigma} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} + \oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S},$$

prin urmare

$$Q_p = - \oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S},$$

deci

$$\oint_S (\epsilon_o \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{S} = Q. \quad (1.90)$$

Câmpul vectorial

$$\mathbf{D} = \epsilon_o \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (1.91)$$

se numește *inducție electrică* (sau *deplasare electrică*). În vid  $\mathbf{P} = 0$ , deci  $\mathbf{D} = \epsilon_o \mathbf{E}$ . Cu această notație, relația (1.90) devine

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q, \quad (1.92)$$

și exprimă *teorema lui Gauss* pentru dielectrici, sub formă integrală.

Dacă sarcinile libere sunt distribuite în mod continuu, atunci  $Q = \int \rho d\tau$  și, aplicând teorema Green-Gauss-Ostrogradski, rezultă

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (1.93)$$

adică *forma diferențială a teoremei lui Gauss*.

Teorema lui Gauss se numără printre ecuațiile fundamentale pe care Maxwell și-a clădit teoria sa relativă la câmpul electromagnetic.

### §1.11. Tipuri de dielectrici

Din punct de vedere al proprietății de polarizare, un mediu poate fi *omogen* (polarizarea nu depinde de punct) sau *neomogen* (dacă depinde). Privit sub alt aspect, mediul polarizabil poate fi *izotrop* (polarizarea nu depinde de direcție) sau *anizotrop* (dacă depinde).

În general, polarizarea  $\mathbf{P}$  indusă într-un mediu polarizabil este o funcție de intensitatea câmpului:  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$ . Pentru câmpuri nu prea intense, dacă presupunem că există o polarizare *spontană*  $\mathbf{P}_o$ , putem admite dezvoltarea

$$\mathbf{P} \simeq \mathbf{P}_o + \alpha \mathbf{E},$$

unde  $\alpha$  este un coeficient numit *polarizabilitate*. Dacă  $\mathbf{P}_o = 0$ , iar  $\alpha$  nu depinde de câmpul aplicat, mediul se numește *liniar*. Precizăm că vom considera, în studiul ce urmează, doar medii liniare.

Experimentul arată că, în cazul mediilor liniare, omogene și izotrope avem  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ , unde  $\epsilon = \epsilon_o \epsilon_r$ . Utilizând (1.91), avem

$$\mathbf{P} = \epsilon_o(\epsilon_r - 1) \mathbf{E} = \epsilon_o \kappa \mathbf{E} = \alpha \mathbf{E}, \quad (1.94)$$

în care mărimea  $\kappa = \epsilon_r - 1$  se numește *susceptibilitate electrică* a mediului și *polarizabilitatea*, potrivit celor de mai sus, este  $\alpha = \epsilon_o \kappa$ . Uneori, în relația (1.94) se pune în evidență concentrația volumică  $n$  a moleculelor:  $\mathbf{P} = \epsilon_o n \kappa \mathbf{E}$ .

În mediile izotrope neomogene  $\mathbf{D} = \epsilon(x, y, z) \mathbf{E}$ , deci coeficienții  $\kappa$  și  $\alpha$  sunt funcții de punct:

$$\mathbf{P} = \epsilon_o \kappa(x, y, z) \mathbf{E} = \alpha(x, y, z) \mathbf{E}. \quad (1.95)$$

Mediile *feroelectrice* se caracterizează printr-o polarizație  $\mathbf{P}_o \neq 0$  în absența câmpului electric exterior

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_o + \alpha \mathbf{E}, \quad (1.96)$$

iar ultimul termen din (1.96) poate fi de forma

$$\alpha_1 E + \alpha_2 E^2 + \alpha_3 E^3 + \dots \quad (\alpha_1 \ll \alpha_2 \ll \alpha_3 \ll \dots) . \quad (1.97)$$

În mediile liniare anizotrope relația dintre  $\mathbf{P}$  și  $\mathbf{E}$  are un caracter tensorial

$$P_i = \epsilon_o \kappa_{ik} E_k; \quad (i, k = \overline{1, 3}), \quad (1.98)$$

unde  $\kappa_{ik}$  este *tensorul susceptibilității electrice* a mediului. Putem scrie

$$D_i = \epsilon_{ik} E_k = \epsilon_o (\epsilon_r)_{ik} E_k = \epsilon_o \delta_{ik} E_k + P_i,$$

prin urmare

$$D_i = \epsilon_o \left[ (\epsilon_r)_{ik} - \delta_{ik} \right] E_k = \epsilon_o \kappa_{ik} E_k$$

în care

$$\kappa_{ik} = (\epsilon_r)_{ik} - \delta_{ik}. \quad (1.99)$$

Amintim, în încheierea paragrafului, că polarizarea electrică poate fi:

- *diaelectrică*, ca urmare a deplasării centrelor sarcinilor pozitive și negative din atomi (molecule) sub acțiunea câmpului electric  $\mathbf{E}$ ;
- *paraelectrică*, datorită orientării dipolilor cu moment dipolar  $\mathbf{p} \neq 0$  în absența câmpului, dar cu  $\mathbf{P} = 0$ , ca urmare a agitației termice;
- *feroelectrică* (*segnetoelectrică*), caracterizată prin  $\mathbf{P}_o \neq 0$  în absența câmpului exterior.

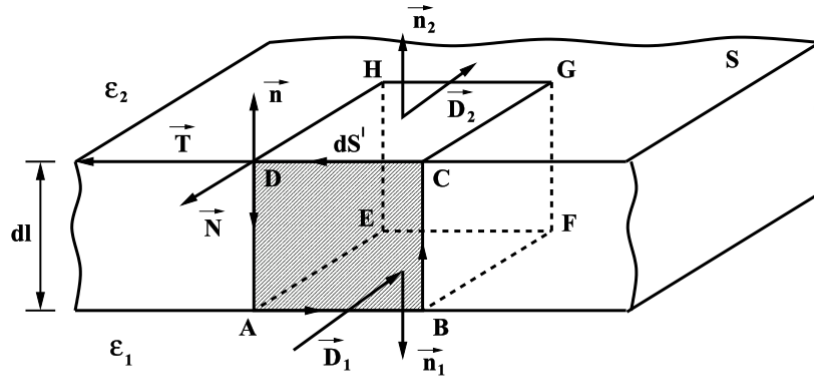
### §1.12. Ecuații de trecere pentru componentele de câmp $\mathbf{E}, \mathbf{D}$

La trecerea prin pături ce separă medii cu permitivități diferite, mărimile de câmp  $\mathbf{E}, \mathbf{D}$  variază foarte mult de la un punct la altul (variație rapidă), astfel încât liniile de câmp suferă variații discontinue (refracții). Aceasta ne determină să considerăm păturile de trecere drept



*suprafețe de discontinuitate* pentru mărimile de câmp. Relațiile ce descriu variația componentelor normale și tangențiale ale componentelor de câmp  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  la trecerea prin astfel de suprafețe se numesc *ecuații de trecere*.

Considerăm două medii dielectrice vecine, omogene și izotrope, caracterizate prin permitivitățile  $\epsilon_1$  și  $\epsilon_2$ , separate printr-un strat de grosime  $dl$ , în care există sarcini electrice. Fie  $\mathbf{E}_1, \mathbf{D}_1$ , respectiv  $\mathbf{E}_2, \mathbf{D}_2$  vectorii de câmp în cele două medii.



**Fig. 1.10.**

În pătura de trecere vom delimita o prismă dreptunghiulară elementară, de înălțime  $dl$ , bază  $dS'$  și volum  $d\tau'$ , cu versorii normalelor la fețele bazelor orientați așa cum este indicat în Fig.1.10.

Orice componentă a mărimilor de câmp  $\mathbf{E}, \mathbf{D}$  se poate descompune în două componente vectoriale : una *normală* la  $dS'$  și una *tangentă* acesteia. În cele ce urmează, ne propunem să stabilim relațiile de trecere pentru componentele normale și tangențiale ale mărimilor vectoriale  $\mathbf{E}, \mathbf{D}$ .

#### a) Ecuațiile de trecere pentru componentele normale

Aplicând teorema lui Gauss (1.92) la prisma elementară ABCDE-FGH construită în Fig. 1.10, avem:

$$d\Phi_e = \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = d\Phi_1 + d\Phi_2 + d\Phi_l = dQ,$$

unde  $d\Phi_1$ ,  $d\Phi_2$  sunt fluxurile elementare prin fețele bazelor, iar

$$dQ = \rho d\tau = \rho dS' dl.$$

Alegând  $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}$ , putem scrie:

$$d\Phi_1 = \mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 = \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n}_1 dS' = -\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n} dS' = -D_{1n} dS';$$

$$d\Phi_2 = \mathbf{D}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 = \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}_2 dS' = \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n} dS' = D_{2n} dS'.$$

La limita  $dl \rightarrow 0$ , ținând seama că sarcina trebuie să rămână finită și egală cu  $dQ$ , avem

$$\lim_{dl \rightarrow 0} d\Phi_l = 0; \quad \lim_{dl \rightarrow 0} dQ = \left( \lim_{dl \rightarrow 0} \rho dl \right) dS' = \sigma dS'.$$

Rezultă atunci

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = D_{2n} - D_{1n} = \sigma, \quad (1.100)$$

ecuație ce exprimă *discontinuitatea* componentei normale a inducției electrice. Cum  $\mathbf{D}_1 = \epsilon_1 \mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{D}_2 = \epsilon_2 \mathbf{E}_2$ , din (1.100) mai deducem

$$\epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_1 E_{1n} = \sigma. \quad (1.101)$$

În concluzie, componentele normale ale lui  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{D}$  variază *discontinuu*. Dacă  $\sigma = 0$  și  $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ ,  $D_n$  prezintă continuitate, iar  $E_n$  variază discontinuu.

#### b) Ecuațiile de trecere pentru componentele tangențiale

Să calculăm circulația vectorului de câmp  $\mathbf{E}$  de-a lungul conturului elementar închis  $ABCD A$  (Fig. 1.10). Utilizând (1.25), avem:

$$\oint_{ABCD A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{AB} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{s}_1 + \int_{BC} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_{CD} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{s}_2 + \int_{DA} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

Cum  $d\mathbf{s}_1 = -\mathbf{T} ds$ ,  $d\mathbf{s}_2 = \mathbf{T} ds$ , iar

$$\lim_{dl \rightarrow 0} \int_{BC} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \lim_{dl \rightarrow 0} \int_{DA} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0,$$

rezultă

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{T} = E_{2T} - E_{1T} = 0. \quad (1.102)$$

Observând că  $\mathbf{T} = \mathbf{N} \times \mathbf{n}$ , mai putem scrie

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{N} \times \mathbf{n} = \mathbf{N} \cdot [\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)] = 0,$$

sau, eliminând cazul cu totul singular când vectorii ar fi coplanari

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0.$$

Înlocuind  $E_{1T} = D_{1T}/\epsilon_1$ ,  $E_{2T} = D_{2T}/\epsilon_2$  în (1.102), mai avem

$$\frac{D_{2T}}{\epsilon_2} - \frac{D_{1T}}{\epsilon_1} = 0. \quad (1.103)$$

Așadar, componenta tangențială a câmpului  $\mathbf{E}$  prezintă continuitate, în timp ce componenta tangențială a câmpului  $\mathbf{D}$  suferă un salt în valoare de  $\epsilon_1/\epsilon_2$ . Dacă  $\epsilon_1 = \epsilon_2$ , atunci  $D_{2T} = D_{1T}$ .

### Observații

a) Câmpul electrostatic fiind conservativ, ecuațiile de trecere (1.101) și (1.102) conduc la următoarele *condiții la limită* :

$$\left(\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial T}\right)_1 = \left(\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial T}\right)_2; \quad \epsilon_1 \left(\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial n}\right)_1 - \epsilon_2 \left(\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial n}\right)_2 = \sigma. \quad (1.103')$$

Din prima relație, având în vedere continuitatea derivatei tangențiale, rezultă  $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2$ .

b) Din punct de vedere electrostatic, corpurile se împart în conductoare și dielectrice (izolatoare). În punctele interioare unui conductor, potrivit legii lui Ohm (vezi 2.19), câmpul electric este nul ( $\mathbf{E} = 0$ ). De aici rezultă că pe suprafața unui conductor  $\sigma = D_n = \epsilon E_n$ , deci

$$\mathcal{N}_S = \text{const}; \quad \sigma = -\epsilon \left(\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial n}\right)_S, \quad (1.104)$$

adică  $\mathbf{E}$  are direcția normalei la suprafață.

Câmpul electric în interiorul dielectricului nu este nul. În fiecare punct interior potențialul satisface ecuația lui Poisson, iar pe frontieră ecuațiile de trecere (1.101) și (1.102).

### PROBLEME

1. Să se calculeze potențialul câmpului electrostatic creat de o sarcină punctiformă  $q$ , aflată într-un mediu dielectric omogen anizotrop.
2. Permitivitatea unei sfere dielectrice neomogene, de rază  $R$ , aflată în vid, variază după legea  $\epsilon(r) = \epsilon_o(\frac{r}{R} + 2)$ . Să se calculeze intensitatea câmpului electrostatic creat de sarcina  $Q$ , distribuită uniform în întregul volum al sferei.
3. În centrul unei sfere dielectrice omogene, de rază  $R$  și permitivitate relativă  $\epsilon_r$ , se află o sarcină punctiformă  $q$ . Admițând că sfera se află în vid, să se calculeze densitatea  $\sigma_p$  a sarcinilor de polarizare pe suprafața sferei.
4. Să se arate că între polarizabilitatea atomică  $\alpha$  a unei substanțe dielectrice, permitivitatea relativă  $\epsilon_r$  și densitatea volumică a numărului de atomi  $n$  există relația

$$\alpha = \frac{3}{n} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{3}{n} \frac{\epsilon - \epsilon_o}{\epsilon + 2\epsilon_o},$$

cunoscută sub numele de *formula Clausius - Mosotti*.

## C. Metode speciale de rezolvare a problemelor de electrostatică

### §1.13. Considerații generale

Așa cum am menționat în §5, integrarea ecuației Laplace se poate realiza relativ ușor dacă se cunoaște funcția Green asociată problemei în discuție. Cum aflarea funcției Green prezintă, în general, un grad ridicat de dificultate, au fost elaborate unele metode speciale de soluționare a problemelor de electrostatică. În cele ce urmează, vom trece în revistă câteva dintre aceste metode.

Procedeul general care se utilizează constă în integrarea ecuației Laplace, luând în considerație condițiile la limită satisfăcute de potențialul  $V$  al câmpului electrostatic. Aceste condiții sunt:

a) Potențialul este finit peste tot, în afară de punctele unde se află sursele (sarcinile) punctiforme.

b) Potențialul este continuu peste tot, inclusiv suprafața corpului (dielectric sau conductor), cu excepția păturilor duble.

c) Pe suprafața conductorului trebuie să se dea ori  $V = V_S = \text{const.}$ , ori (vezi 1.104)

$$\sigma = -\epsilon \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_S \quad \text{sau} \quad Q = -\epsilon \frac{\partial V}{\partial n} dS.$$

d) La suprafața unui dielectric, pentru  $\sigma = 0$ , avem

$$\epsilon_2 \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_2 - \epsilon_1 \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_1 = 0. \quad (1.105)$$

e) Potențialul se anulează la infinit, dacă toate sursele se află la o distanță finită.

### §1.14. Metoda imaginilor electrice

Această metodă este utilizată în problema determinării unor mărimi electrice ca : potențialul, densitatea de sarcină, forța de interacțiune etc., în cazul uneia sau mai multor sarcini electrice punctiforme, în prezența unor suprafețe limitrofe (de separație), de pildă conductoare legate la pământ sau menținute la un potențial constant.

Se constată, în funcție de geometria problemei, că un număr mic de sarcini, având valori și poziții alese în mod convenabil, pot simula condițiile la limită impuse de problemă. Acestea se numesc *sarcini-imagine*, iar înlocuirea problemei în care intervin suprafețe limitrofe cu una în care acestea sunt înlocuite cu sarcini-imagine se numește *metoda imaginilor*.

Metoda enunțată permite, între altele, determinarea densității de sarcină electrică  $\sigma$  pe suprafața unui conductor de formă simplă (plan, sferă etc.), aflat în prezența uneia sau mai multor sarcini punctiforme, *fără* a apela la ecuația lui Laplace.

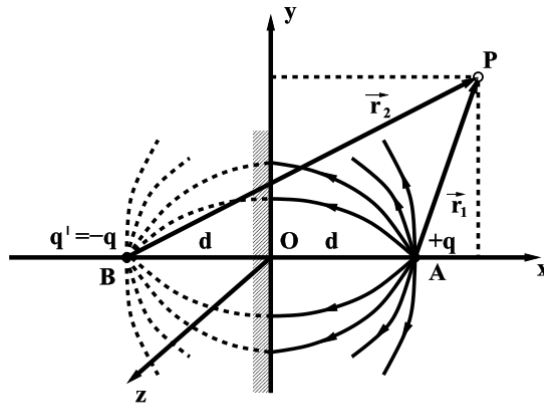
a) **Conductor plan.** Fie o suprafață metalică plană, legată la pământ, aflată în vid, sub influența sarcinii punctiforme  $+q$  (Fig. 1.11).

Potențialul în punctul  $P$  va fi dat de suma dintre potențialul sarcinii  $+q$  și potențialul distribuției de sarcină de pe plan, apărută ca urmare a influenței lui  $+q$  :

$$\mathcal{N}_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \oint_S \frac{\sigma(\mathbf{r}') dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1.106)$$

Pentru a cunoaște  $\sigma$ , trebuie să cunoaștem câmpul potrivit relației (1.104), prin urmare este necesar să găsim o metodă de determinare a densității superficiale de sarcină  $\sigma$  pe plan. Observăm, în acest scop, că prelungirile prin simetrie ale liniilor de forță se întâlnesc într-un punct  $B$ , simetricul punctului  $A$  în raport cu planul  $x = 0$ , plan care este totodată o suprafață echipotențială ( $V = 0$ ). Aceasta sugerează ideea de a înlocui sarcinile de influență de pe plan cu o sarcină punctiformă "image"  $q'$ . Potențialul în  $P$  este atunci

$$\mathcal{N}_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left( \frac{q_1}{r_1} + \frac{q'}{r_2} \right). \quad (1.107)$$



**Fig. 1.11.**

În orice punct al suprafeței echipotențiale  $\mathcal{N} = 0$  avem  $r_1 = r_2$ , de unde rezultă  $q' = -q$ , așadar

$$\mathcal{N}_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \left\{ [(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{-\frac{1}{2}} - [(x+d)^2 + y^2 + z^2]^{-\frac{1}{2}} \right\},$$

ceea ce permite calcularea densității superficiale a sarcinii de influență  $\sigma$  conform relației (1.104) :

$$\sigma = -\epsilon_o \left( \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial n} \right)_S = -\epsilon_o \left( \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x} \right)_{x=0} = -\frac{q}{2\pi} \frac{d}{r_o^3}, \quad (1.108)$$

unde  $r_o = (d^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ .

b) **Frontieră plană între doi dielectrics.** Admitem, de data aceasta, că planul  $x = 0$  separă două medii dielectrice de permitivități  $\epsilon_1(x > 0)$  și  $\epsilon_2(x < 0)$ , sarcina punctiformă  $q$  păstrându-și poziția din Fig. 1.11.

În acest caz, ținând seama că pe suprafața de separație nu avem sarcini libere (reale), condițiile de continuitate ale potențialului și câmpului pe frontieră cer să avem :

$$\mathcal{N}_1|_S = \mathcal{N}_2|_S \quad ; \quad \epsilon_1 \left( \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial n} \right)_S = \epsilon_2 \left( \frac{\partial \mathcal{N}_2}{\partial n} \right)_S, \quad (1.109)$$

unde  $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}(x > 0)$ ,  $\mathcal{N}_2 = \mathcal{N}(x < 0)$ . Pentru a determina  $\mathcal{N}_1$  considerăm sarcina  $q$  și "imaginea"  $q'$  a acesteia față de plan, ambele aflate într-un dielectric de permitivitate  $\epsilon_1$ , adică

$$\mathcal{N}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left( \frac{q_1}{r_1} + \frac{q'}{r_2} \right).$$

Potențialul  $\mathcal{N}_2$ , determinat în același punct ca și  $\mathcal{N}_1$ , se datorează câmpului creat de o sarcină  $q''$  care se găsește în punctul  $A$  și este "imaginea" unei sarcini fictive ce s-ar găsi în punctul  $B$ , sistemul găsindu-se într-un dielectric de permitivitate  $\epsilon_2$  :

$$\mathcal{N}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q''}{r_2}.$$

Utilizând condițiile la limită (1.109), obținem sistemul

$$q - q' = q'' \quad ; \quad \epsilon_2(q + q') = \epsilon_1 q'',$$

de unde

$$q' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q \quad ; \quad q'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q \quad (q = q' + q'').$$

Să calculăm densitatea superficială a sarcinii de polarizare pe planul  $x = 0$ . În virtutea relațiilor (1.89), (1.91) și (1.109), putem scrie:

$$\begin{aligned} \sigma &= P_{1n} - P_{2n} = [(\epsilon - \epsilon_o)]_{1n} - [(\epsilon - \epsilon_o)]_{2n} = \epsilon_o(E_{2n} - E_{1n}) = \\ &= \epsilon_o \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial x} \right)_{x=0} - \left( \frac{\partial \mathcal{N}_2}{\partial x} \right)_{x=0} \right]. \end{aligned}$$

Efectuând calculele, obținem :

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\epsilon_o}{4\pi} \left[ \frac{q(x-d)}{\epsilon_1(\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2})^3} + \frac{q'(x+d)}{\epsilon_1(\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2})^3} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{q''(x-d)}{\epsilon_2(\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2})^3} \right]_{x=0} = \\ &= \frac{\epsilon_o q d}{4\pi \epsilon_1 r_o^3} \left[ -1 + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} + \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right] = \\ &= \frac{\epsilon_o q d}{2\pi \epsilon_1 r_o^3} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}, \end{aligned} \quad (1.110)$$

unde  $r_o$  are aceeași semnificație ca și în relația (1.108). Dacă  $\epsilon_1 = \epsilon_2$ , rezultă  $\sigma = 0$ , după cum era de așteptat.

c) **Conductor sferic.** Fie o sferă conductoare de rază  $R$ , legată la pământ, situată în vid, la distanța  $a$  de o sarcină punctiformă  $q$  aflată în punctul  $A$ . Sarcinile de influență de pe sferă pot fi înlocuite cu sarcina "imaginate"  $q'$ , aflată în punctul  $B$ , la distanța  $b$  față de centrul  $O$  al sferei (Fig. 1.12). Potențialul în punctul  $P$  va fi atunci de forma (1.107), adică

$$\mathcal{N}_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left( \frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} \right). \quad (1.111)$$

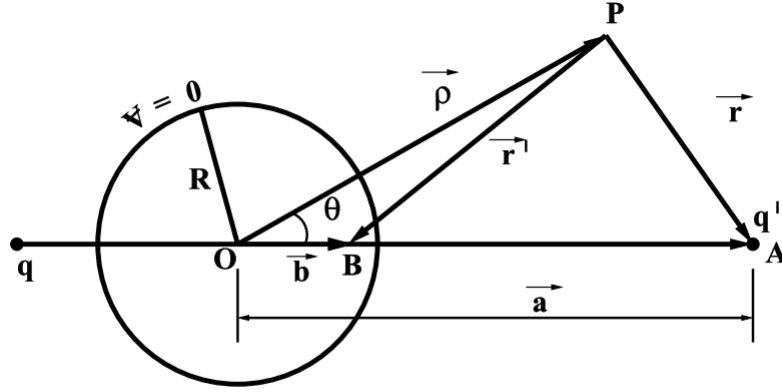


Din condiția  $\mathcal{N} = 0$  pe suprafața sferei, deducem

$$\frac{q}{(a^2 + R^2 - 2aR \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} + \frac{q'}{(b^2 + R^2 - 2bR \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

sau

$$\frac{q}{a} \left( 1 + \frac{R^2}{a^2} - \frac{2R}{a} \cos \theta \right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{q'}{R} \left( 1 + \frac{b^2}{R^2} - \frac{2b}{R} \cos \theta \right)^{-\frac{1}{2}} = 0.$$



**Fig. 1.12.**

Se observă că această egalitate devine o identitate dacă se alege

$$a b = R^2 \quad : \quad q' = -\frac{R}{a} q, \quad (1.112)$$

prin urmare

$$\mathcal{N}_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left( \frac{1}{r} - \frac{R}{a} \frac{1}{r'} \right).$$

Relația (1.112) arată că sarcina  $q'$  este plasată în inversul punctului A (unde se află  $q$ ) față de sferă.

Densitatea de sarcină pe sferă va fi atunci

$$\sigma = -\epsilon_o \left( \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \rho} \right)_{\rho=R} = \frac{q}{4\pi b^2} \frac{\left( \frac{b^2}{R^2} - 1 \right)}{\left( 1 + \frac{R^2}{b^2} - 2\frac{R}{b} \cos \theta \right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1.113)$$

Acest rezultat poate fi exprimat exclusiv în funcție de  $a$ . Utilizând (1.112), obținem

$$\sigma = -\frac{q}{4\pi} \frac{a^2 - R^2}{Rr_o^3}, \quad (1.114)$$

unde

$$r_o = r|_{\rho=R} = (a^2 + R^2 - 2aR \cos \theta)^{\frac{1}{2}}.$$

### §1.15. Integrarea ecuației lui Laplace prin metoda separării variabilelor

Ne propunem să determinăm, utilizând de data aceasta ecuația lui Laplace, potențialul câmpului electrostatic produs de un corp electrizat în mod uniform. Întrucât geometria multor probleme de electrostatică prezintă simetrie sferică sau cilindrică, vom ilustra metoda în coordonate sferice și cilindrice.

#### 1. Coordonate sferice

Fie  $r, \theta, \phi$  coordonatele sferice ale punctului în care determinăm potențialul  $\mathcal{N} = \mathcal{N}(r, \theta, \phi)$ . Având în vedere (D.27), ecuația lui Laplace se va scrie

$$\frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \phi^2} \right] \right\} = 0$$

sau, dacă exprimăm primul termen în alt mod,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \mathcal{N}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \phi^2} = 0. \quad (1.115)$$

Vom căuta soluția ecuației (1.115) sub forma

$$\mathcal{N}(r, \theta, \phi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\phi). \quad (1.119)$$

Introducând (1.116) în (1.115) și folosind substituția  $R(r) = \frac{1}{r} U(r)$ , avem :

$$\frac{1}{r} \frac{d^2 U}{dr^2} \Theta \Phi + \frac{U}{r^3} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \right] \Phi + \frac{U}{r^3} \frac{\Theta}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0.$$

Amplificând această ecuație cu  $r^2 \sin^2 \theta / U \Phi \Theta$ , mai putem scrie

$$\frac{r^2 \sin^2 \theta}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0. \quad (1.117)$$

Expresia  $\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2}$  depinde numai de  $\phi$ . Pe de altă parte, potrivit ecuației (1.117), această expresie depinde numai de  $r$  și  $\theta$ . Un asemenea lucru este posibil numai dacă

$$\frac{r^2 \sin^2 \theta}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = \gamma, \quad (1.118)$$

unde  $\gamma$  este o constantă. Soluția generală a ecuației

$$\Phi'' + \gamma \Phi = 0$$

este de forma

$$\Phi = C_1 e^{\sqrt{-\gamma}\phi} + C_2 e^{-\sqrt{-\gamma}\phi}. \quad (1.119)$$

Pentru ca  $\Phi$  să fie o funcție periodică, de perioadă  $2\pi$ , trebuie ca  $\sqrt{\gamma}$  să fie un număr întreg pozitiv :  $\gamma = m^2$ , cu  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

În problemele de electrostatică se consideră de obicei primul termen al soluției (1.119), adică

$$\Phi = \text{const.} e^{im\phi}, \quad (1.120)$$

sau combinațiile reale de  $\cos m\phi$  și  $\sin m\phi$ .

Din ecuația (1.118) mai rezultă:

$$\frac{r^2}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = 0.$$

Repetând procedeul de mai sus și notând  $l(l+1)$  constanta de separație, obținem următoarele două ecuații în  $r$  și  $\theta$  :

$$\frac{d^2 U}{dr^2} = \frac{l(l+1)}{r^2} U, \quad (1.121)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + l(l+1) \Theta - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \Theta = 0. \quad (1.122)$$

Ecuatia în  $\theta$  admite soluții finite numai dacă  $l$  este un număr întreg negativ, astfel încât  $-l \leq m \leq +l$ . Soluțiile respective se numesc *polinoame Legendre asociate* și se definesc prin

$$P_l^m(x) = \frac{1}{2^l l!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l \quad (x = \cos \theta). \quad (1.123)$$

Soluțiile ecuației (1.121) se caută de forma

$$U(r) = A r^\alpha \quad (1.124)$$

și, după efectuarea derivatei, obținem:

$$[\alpha(\alpha-1) - l(l+1)] U(r) = 0. \quad (1.125)$$

De aici rezultă că  $\alpha$  poate fi  $l+1$  sau  $l$ , prin urmare  $U(r)$  este de forma

$$U(r) = A r^{l+1} + \frac{B}{r^l},$$

deci

$$R(r) = \frac{1}{R} U(r) = A r^l + B r^{-(l+1)}. \quad (1.126)$$

Utilizând rezultatele obținute și având în vedere că suma a două soluții a ecuației lui Laplace este de asemenea o soluție, avem în definitiv

$$\mathcal{N}(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} (A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (1.127)$$

unde am notat cu  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  funcțiile sferice

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}. \quad (1.128)$$

### Cazuri particulare

a) Potențialul în interiorul unui conductor trebuie să rămână finit, deci pentru  $r = 0$  trebuie să luăm  $B_{lm} = 0$ , iar soluția (1.127) se reduce la

$$\mathcal{N}(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} A_{lm} r^l Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (1.129)$$

b) În exteriorul unui conductor potențialul trebuie să fie finit și să se anuleze la infinit, deci pentru  $r \rightarrow \infty$  trebuie să luăm  $A_{lm} = 0$  și atunci

$$\mathcal{N}(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} B_{lm} r^{-(l+1)} Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (1.130)$$

c) Dacă potențialul prezintă simetrie față de axa  $Oz$ , avem  $m = 0$ , iar soluția (1.127) capătă forma

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l^o(\cos \theta) = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} (C_l r^l + D_l r^{-(l+1)}) P_l^o, \end{aligned} \quad (1.131)$$

unde  $P_l^o$  sunt polinoamele Legendre de gradul  $l$  și ordinul zero (vezi 1.123) :

$$P_0^o = 1 ; \quad P_1^o = \cos \theta ; \quad P_2^o = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) \text{ etc.}$$

De pildă, dezvoltând în serie expresia  $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$  care intervine în potențialul unei sarcini punctiforme, avem :

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{r'}{r} \cos \theta + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \right],$$

care se mai poate scrie

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l^o(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l^o(\cos \theta). \quad (1.132)$$

Comparând acest rezultat cu teoria dezvoltată în §1.8, constatăm că primul termen din (1.132) înmulțit cu  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0}$  reprezintă potențialul de monopol, cel de al doilea potențialul de dipol, al treilea potențialul de cuadрупol etc.

**2. Coordonate cilindrice.** Apelând la Anexa D, vom scrie ecuația lui Laplace în coordonate cilindrice  $r, \theta, z$  sub forma

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial z^2} = 0. \quad (1.133)$$

Pentru a separa variabilele, vom efectua substituția

$$\mathcal{N}(r, \theta, z) = R(r) \Theta(\theta) Z(z). \quad (1.134)$$

În continuare, un calcul analog celui de la punctul precedent ne conduce la ecuațiile

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Z}{dz^2} + C_1 Z &= 0 ; \\ \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} - C_2 \Theta &= 0 ; \end{aligned} \quad (1.135)$$

$$r \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) - (C_1 r^2 - C_2) R = 0 ,$$

de unde deducem  $C_1 = -k^2$ ,  $C_2 = -m^2$ . În acest caz, ecuațiile (1.135)<sub>1,2</sub> vor avea soluții de forma  $sh\ kz$ ,  $ch\ kz$ , respectiv  $\sin m\theta$ ,  $\cos m\theta$ , iar (1.135)<sub>3</sub> conduce la

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left( k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0, \quad (1.136)$$

cunoscută sub numele de *ecuația lui Bessel*. Efectuând schimbarea de variabilă  $\rho = k r$ , aceasta se mai scrie

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right) + (\rho^2 - m^2) R = 0. \quad (1.137)$$

O soluție particulară a ecuației (1.137) este de forma

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^{n+p}, \quad (1.138)$$

unde coeficienții  $a_n$  și indicele  $p$  urmează a fi determinați. Introducând (1.138) în (1.137), avem :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ (n+p)^2 - m^2 + \rho^2 \right] a_n \rho^{n+p} = 0.$$

De aici găsim următoarele relații de recurență pentru coeficienții  $a_n$  :

$$\begin{aligned} (p^2 - m^2) a_0 &= 0 ; \\ [(1+p)^2 - m^2] a_1 &= 0 ; \\ [(2+p)^2 - m^2] a_2 - a_0 &= 0 ; \\ &\dots\dots\dots \\ [(n+p)^2 - m^2] a_n + a_{n-2} &= 0 \quad (n \geq 2). \end{aligned} \quad (1.139)$$

Admițând  $a_0 \neq 0$  (ceea ce presupune  $a_1 = 0$ ), rezultă  $p = \pm|m|$ . Să considerăm cazul  $p \geq 0$ . În general, putem scrie

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) , \\ a_{2n} &= -\frac{a_{2n-2}}{2^2 n(n+p)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Scriind relații similare în care  $n$  este înlocuit cu  $n-1$ ,  $n-2, \dots, l$  și efectuând produsul membru cu membru, obținem

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n! (p+1)(p+2)\dots(p+n)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (1.140)$$

Dacă alegem  $a_0 = 1/2^p p!$ , o soluție a ecuației Bessel, cunoscută sub numele de *funcția Bessel de speța întâi*, este

$$J_p(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \rho^{2n+p}}{2^{2n+p} n! (n+p)!}. \quad (1.141)$$

Întrucât (1.137) este o ecuație diferențială de ordinul al doilea, mai există o soluție  $N_p(\rho)$ , numită *funcția Bessel de speța a doua*, astfel încât soluția generală a ecuației Bessel este

$$R(r) = A J_p(kr) + B N_p(kr). \quad (1.142)$$

Soluția  $Z(z)$  este de forma  $A e^{kz}$ , în care semnul lui  $k$  poate fi atât plus cât și minus.

Unificând rezultatele de mai sus, vom scrie soluția ecuației lui Laplace în coordonate cilindrice sub forma

$$\mathcal{N}(r, \theta, z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [A_m(k) J_{|m|}(kr) + B_m(k) N_{|m|}(kr)] e^{kz} e^{im\phi} dk \quad (1.143)$$

Menționăm că soluțiile oscilatorii în  $z$  (corespunzând lui  $k$  imaginar) se scriu în mod diferit.

Se poate arăta că, dacă alegem  $p = -|m|$ , putem avea cel mult o schimbare de semn la rezultat. (Pentru detalii, vezi Bibliografia recomandată).

### §1.16. Probleme electrostatice bidimensionale

Unele probleme de electrostatică prezintă particularitatea că pot fi studiate în două dimensiuni, de pildă într-un plan. Situații de acest gen se întâlnesc în cazul sistemelor la care distribuția de sarcină electrică prezintă anumite simetrii (de ex. cilindrică), caz în care problema se studiază într-un plan ortogonal la axa de simetrie, extinderea soluției la trei dimensiuni fiind apoi imediată. Astfel de probleme se numesc *bidimensionale* (plane) și se soluționează în mod elegant cu ajutorul funcțiilor de o variabilă complexă.



Fie variabila complexă  $z = x + iy$ . Dacă fiecărei valori a lui  $z$  îi corespunde un număr complex  $f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ , unde  $\phi(x, y)$  și  $\psi(x, y)$  sunt funcții reale, spunem că  $f(z)$  este o funcție de variabila complexă  $z$ . Să calculăm

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \left[ \frac{\phi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \phi(x, y)}{\Delta x + i\Delta y} + \right. \\
 & \quad \left. + i \frac{\psi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \psi(x, y)}{\Delta x + i\Delta y} \right] = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \left[ \frac{\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta x + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \Delta y \right) + i \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \Delta x - i \frac{\partial \phi}{\partial y} \Delta y \right)}{\Delta x + i\Delta y} \right]. \quad (1.144)
 \end{aligned}$$

Limita (1.144) este independentă de modul în care  $\Delta x$  și  $\Delta y$  tind la zero dacă funcțiile  $\phi(x, y)$  și  $\psi(x, y)$  satisfac condițiile

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (1.145)$$

numite *condițiile Cauchy - Riemann*. Dacă aceste condiții sunt îndeplinite, spunem că funcția  $f(z)$  este *monogenă* în punctul de afix  $z$ , iar limita (1.144) se numește *derivata* funcției  $f(z)$  în acel punct. Dacă  $f(z)$  este monogenă în fiecare punct al unui domeniu  $D$ , spunem că este *olomorfă* în acel domeniu. Funcția  $f(z)$  este *analitică* în punctul de afix  $z$  dacă este olomorfă în fiecare punct al unei vecinătăți a lui  $z$ .

Utilizând condițiile Cauchy - Riemann (1.145), avem:

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} - i \frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (1.146)$$

Din condițiile (1.145) rezultă imediat următoarele proprietăți ale funcțiilor  $\phi$  și  $\psi$ :

$$\Delta \phi = 0; \quad \Delta \psi = 0; \quad (1.147)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi) = 0, \quad (1.148)$$

deci  $\phi$  și  $\psi$  sunt *funcții armonice*, iar familiile de curbe  $\phi = \text{const.}$  și  $\psi = \text{const.}$  sunt *ortogonale*. Funcția  $f(z)$  se mai numește *potențial complex* și se notează cu  $w$ .

În cele ce urmează vom aplica aceste considerații generale la rezolvarea unor probleme din electrostatică prin metoda funcțiilor complexe și a transformărilor conforme.

Fie câmpul electrostatic  $\mathbf{E}(x, y)$  definit în planul  $x, y$ , în care densitatea de sarcină electrică este nulă. Din  $\mathbf{E} = -\nabla \mathcal{V}$  și  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ , rezultă atunci, pe de o parte  $\Delta \mathcal{V} = 0$ , iar pe de alta  $\mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{U}$ , în care presupunem că  $\mathbf{U}$  are componentele  $(0, 0, U)$ . Proiectând pe axe relația vectorială  $\nabla \times \mathbf{U} = -\nabla \mathcal{V}$ , avem:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, \quad (1.149)$$

deci partea reală  $U(x, y)$  și cea imaginară  $\mathcal{V}(x, y)$  ale potențialului complex

$$w = f(z) = U(x, y) + i \mathcal{V}(x, y) \quad (1.150)$$

satisfac condițiile Cauchy - Riemann (1.145). Dacă admitem, prin convenție, că familia de curbe  $\mathcal{V}(x, y) = \text{const.}$  reprezintă liniile echipotențiale, atunci familia  $U = \text{const.}$  vor avea semnificația liniilor de forță. Cele două familii de curbe, potrivit lui (1.148), sunt ortogonale. Mai avem :

$$E^2 = E_x^2 + E_y^2 = \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}\right)^2.$$

Pe de altă parte, în conformitate cu (1.146) și (1.149)

$$\begin{aligned} \left|\frac{df}{dz}\right|^2 &= \left(\frac{df}{dz}\right) \left(\frac{df}{dz}\right)^* = \left(\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial U}{\partial x} - i \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\right) = \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}\right)^2. \end{aligned}$$

Comparând ultimele două relații, deducem

$$E = \left|\frac{df}{dz}\right|. \quad (1.151)$$

Prin urmare, cunoașterea potențialului complex corespunzător unei anumite configurații electrostatice permite determinarea câmpului acelei configurații cu ajutorul relației (1.151). La rândul său, potențialul complex este determinat de forma secțiunii plane a unui anumit conductor sau de distribuția sarcinilor ce creează câmpul.

Transformarea (1.150) exprimă, între altele, trecerea de la un punct de coordonate  $(x, y)$  la un altul de coordonate  $(U, \mathcal{V})$ . Se observă că rețelei de curbe ortogonale  $U(x, y) = \text{const.}$ ,  $\mathcal{V}(x, y) = \text{const.}$  din planul  $z$  îi va corespunde rețeaua de linii drepte ortogonale  $U = \text{const.}$ ,  $\mathcal{V} = \text{const.}$  din planul  $w$ . O transformare care păstrează unghiul dintre curbe la trecerea din planul  $(x, y)$  la planul  $(U, \mathcal{V})$  se numește *transformare conformă*. Transformarea (1.150) este, așadar, o transformare conformă.

Relația dintre elementele de arc între cele două reprezentări, ținând seama că  $dw = dU + i d\mathcal{V} = f'(z) (dx + i dy)$ , se va scrie

$$dL^2 = dU^2 + d\mathcal{V}^2 = |f'(z)|^2(dx^2 + dy^2) = |f'(z)|^2 dl^2.$$

Pentru a scoate în evidență avantajul metodei complexe, vom ilustra considerațiile teoretice de mai sus prin câteva exemple simple

a) Fie potențialul complex de forma

$$w = f(z) = A i \ln z + B, \quad (1.152)$$

unde  $A$  este o constantă reală iar  $B$  una complexă :  $B = C_1 + iC_2$ . Scriind  $z$  sub formă trigonometrică și aplicând (1.150), avem :

$$U = -A \theta + C_1 ; \quad \mathcal{V} = A \ln r + C_2, \quad (1.153)$$

prin urmare liniile de forță  $U = \text{const.}$  ( $\theta = \text{const.}$ ) sunt raze ce pornesc din originea coordonatelor, iar liniile echipotențiale  $\mathcal{V} = \text{const.}$  ( $r = \text{const.}$ ) sunt cercuri concentrice cu centrul comun în originea axelor de coordonate (Fig.1.13).

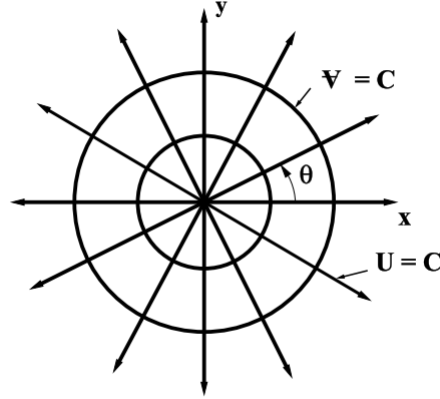
Modulul câmpului se obține utilizând relația (1.151):

$$E^2 = \left| \frac{df}{dz} \right|^2 = \frac{A^2}{|z|^2} = \frac{A^2}{r^2}. \quad (1.154)$$

Același rezultat se găsește exprimând componentele  $E_r$ ,  $E_\theta$  ale câmpului în coordonate polare:

$$E_r = -\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial r} ; E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \theta},$$

apoi efectuând derivatele și utilizând relația  $E^2 = E_r^2 + E_\theta^2$ .



**Fig. 1.13.**

Forma liniilor de câmp și a celor echipotențiale ne arată că este vorba de un conductor liniar, orientat după axa  $Oz$ , electrizat uniform, de lungime suficient de mare pentru ca în orice secțiune  $z = \text{const.}$  să avem aceeași configurație a liniilor  $U = \text{const.}$ ,  $\mathcal{N} = \text{const.}$

Pentru a determina constanta  $A$ , aplicăm teorema lui Gauss la o suprafață cilindrică, cu axul orientat după firul conductor, de rază  $r$  și lungime  $l$ . Avem :

$$\Phi = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E_r (2\pi r l) = \frac{q}{\epsilon_o},$$

de unde, dacă ținem seama că  $E_r = -A/r$ , obținem

$$A = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o}$$

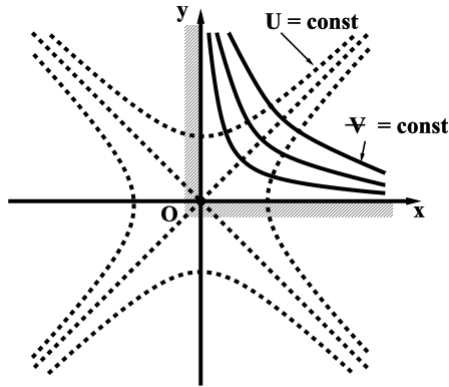
în care  $\lambda$  este densitatea liniară de sarcină.

b) Fie transformarea

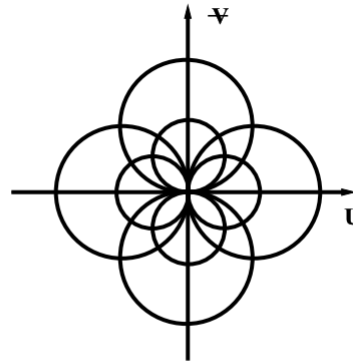
$$w = f(z) = k z^2 = k (x + iy)^2, \quad (1.155)$$

unde  $k$  este o constantă. Repetând procedeul deja cunoscut, găsim

$$U(x, y) = k (x^2 - y^2) ; \quad \mathcal{N}(x, y) = 2 k x y. \quad (1.156)$$



**Fig 1.14.**



**Fig. 1.15.**

Rețeaua de curbe  $x^2 - y^2 = const.$  și  $x y = const.$  reprezintă două familii de hiperbole echilatre (Fig. 1.14). Componentele  $E_x$ ,  $E_y$  ale câmpului electrostatic vor fi

$$E_x = - \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x} = - 2 k y ; \quad E_y = - \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial y} = - 2 k x$$

deci

$$E^2 = E_x^2 + E_y^2 = 4 k^2 (x^2 + y^2) = 4 k^2 r^2. \quad (1.157)$$

Același rezultat se obține din (1.151) :

$$E^2 = \left( \frac{dw}{dz} \right) \left( \frac{dw}{dz} \right)^* = 4 k^2 |z|^2 = 4 k^2 r^2 .$$

Așadar, mărimea intensității câmpului este proporțională cu mărimea vectorului de poziție al unui punct în planul  $(x, y)$ . Un astfel

de câmp poate fi conceput ca existând în vecinătatea unui sistem de conductoare plane în unghi diedru drept și poate fi întâlnit la focalizarea unui flux de sarcini electrice în dispozitive ca microscopul electronic, acceleratoare de particule etc.

c) Ca un ultim exemplu, să considerăm potențialul complex de forma

$$w = f(z) = \frac{A}{r^2}, \quad (1.158)$$

unde  $A$  este o constantă reală. Avem așadar

$$U(x, y) = \frac{A^2 x}{x^2 + y^2}; \quad \mathcal{N}(x, y) = -\frac{A^2 y}{x^2 + y^2},$$

sau, dacă exprimăm  $z$  sub formă trigonometrică  $z = r e^{i\theta}$

$$U = A^2 \frac{\cos \theta}{r}; \quad \mathcal{N} = -A^2 \frac{\sin \theta}{r}.$$

Eliminând  $x$  sau  $y$ , obținem

$$U^2 + \left(\mathcal{N} + \frac{A^2}{2y}\right)^2 = \frac{A^4}{4y^2}; \quad \mathcal{N}^2 + \left(U - \frac{A^2}{2x}\right)^2 = \frac{A^4}{4x^2}. \quad (1.159)$$

Prin urmare, curbele  $y = \text{const.}$  reprezintă o familie de cercuri cu centrele pe axa  $0v$  în punctele  $(-\frac{A^2}{2y})$ , iar curbele  $x = \text{const.}$  sunt niște cercuri cu centrele pe axa  $0u$  în punctele  $(\frac{A^2}{2x})$ . Sistemul ce prezintă o astfel de configurație a liniilor de câmp și a celor echipotențiale este un dipol cilindric, așezat în origine și orientat după axa  $0u$ , respectiv după axa  $0v$  (Fig.1.15).

Mărimea intensității câmpului se determină aplicând relația (1.151). Un calcul simplu conduce la rezultatul

$$E^2 = \left(\frac{A}{r}\right)^4,$$

ceea ce reprezintă cazul coulombian, în care câmpul variază invers proporțional cu pătratul distanței.

### §1.17. Acțiunea mecanică a câmpului electrostatic asupra unui mediu dielectric. Electrostricțiunea

Considerăm un mediu dielectric aflat într-un câmp electric exterior. Fenomenul de polarizare (apariția dipolilor) presupune totodată deplasări mecanice în cadrul moleculelor (atomilor) dielectricului. Dacă moleculele dielectricului sunt inițial neutre, la apariția câmpului exterior va apărea o sarcină de polarizare, distribuită în mod continuu, de densitate  $\rho_e$ . Admițând că dielectricul este liniar și izotrop (dar neomogen), permitivitatea electrică  $\epsilon$  va fi o funcție de poziție și densitate, adică

$$\epsilon = \epsilon[\mathbf{r}, \rho(\mathbf{r})], \quad (1.160)$$

unde  $\rho$  este densitatea masică a dielectricului.

Notând cu  $\mathbf{F}_e$  forța ce acționează din partea câmpului exterior asupra dielectricului, numită *forță ponderomotoare*, să calculăm densitatea  $\mathbf{f}_e$  a acestei forțe. În acest scop, vom scrie în două moduri variația energiei electrostatice a dielectricului în câmpul exterior.

Pe de o parte, întrucât prin definiție  $\mathbf{F}_e = \int \mathbf{f}_e d\tau$ , putem scrie

$$\delta L = - \delta W_e = \int \mathbf{f}_e \cdot \delta \mathbf{a} d\tau, \quad (1.161)$$

unde  $\delta \mathbf{a}$  este o deplasare elementară virtuală a unei particule oarecare a dielectricului, iar  $\delta L$  lucrul mecanic elementar efectuat de toate particulele dielectricului ca urmare a acestor deplasări.

Pe de altă parte, utilizând relația (vezi 1.63)

$$W_e = \frac{1}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} d\tau = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\epsilon} D^2 d\tau$$

avem

$$\delta W_e = - \frac{1}{2} \int E^2 \delta \epsilon d\tau + \int \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} d\tau.$$

Dar

$$\int \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} d\tau = - \int \nabla \cdot \mathcal{N} \delta \mathbf{D} d\tau = - \int \nabla \cdot (\mathcal{N} \delta \mathbf{D}) d\tau + \int \mathcal{N} \nabla \cdot (\delta \mathbf{D}) d\tau.$$

Dacă extindem domeniul (volic) de integrare asupra întregului spațiu și aplicăm teorema Green-Gauss-Ostrogradski, prima integrală din membrul drept se anulează, căci la infinit potențialul este zero. În cel de al doilea termen, potrivit teoremei lui Gauss (1.93), avem  $\nabla \cdot (\delta \mathbf{D}) = \delta \rho$ . Variația energiei electrostatice se va scrie atunci sub forma

$$\delta W_e = -\frac{1}{2} \int E^2 \delta \epsilon \, d\tau + \int \mathcal{N} \delta \rho \, d\tau. \quad (1.162)$$

Pentru a putea compara (1.161) și (1.162), trebuie să exprimăm *variațiile locale*  $\delta \epsilon$  și  $\delta \rho$  în funcție de  $\delta \mathbf{a}$ . Din teoria mediilor continue se știe că aceste variații locale sunt legate de variațiile substanțiale  $D\epsilon$  și  $D\rho$  prin relațiile

$$\frac{D\epsilon}{dt} = \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \epsilon; \quad \frac{D\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho,$$

unde  $\mathbf{u} = \delta \mathbf{a}/dt$  este viteza deplasării virtuale a particulei de fluid. Putem scrie atunci

$$D\epsilon = \delta \epsilon + \delta \mathbf{a} \cdot \nabla \epsilon; \quad D\rho = \delta \rho + \delta \mathbf{a} \cdot \nabla \rho. \quad (1.163)$$

Admițând că observatorul se deplasează odată cu particula de fluid, permitivitatea  $\epsilon$  va fi funcție doar de  $\rho$ , ceea ce ne permite să scriem

$$D\epsilon = \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} D\rho,$$

sau, dacă utilizăm (1.163) și ecuația de continuitate:

$$\delta \epsilon + \delta \mathbf{a} \cdot \nabla \epsilon = \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} (\delta \rho + \delta \mathbf{a} \cdot \nabla \rho) = -\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \rho \nabla \cdot (\delta \mathbf{a}).$$

Prin urmare

$$\delta \epsilon = -\delta \mathbf{a} \cdot \nabla \epsilon - \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \nabla \cdot (\delta \mathbf{a}). \quad (1.164)$$

În mod similar, din ecuația de continuitate relativă la sarcina electrică deducem

$$\delta \rho_e = -\nabla \cdot (\rho_e \delta \mathbf{a}). \quad (1.165)$$



Înlocuind (1.164) și (1.165) în (1.162), obținem :

$$\delta W_e = \frac{1}{2} \int E^2 \nabla \epsilon \cdot \delta \mathbf{a} \, d\tau + \frac{1}{2} \int E^2 \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \nabla \cdot (\delta \mathbf{a}) \, d\tau - \int \mathcal{N} \nabla \cdot (\rho_e \delta \mathbf{a}) \, d\tau.$$

Dar

$$\begin{aligned} \int E^2 \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \nabla \cdot (\delta \mathbf{a}) \, d\tau &= \int \nabla \cdot (E^2 \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \delta \mathbf{a}) \, d\tau - \int \nabla (E^2 \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho}) \cdot \delta \mathbf{a} \, d\tau; \\ \int \mathcal{N} \nabla \cdot (\rho_e \delta \mathbf{a}) \, d\tau &= \int \nabla \cdot (\mathcal{N} \rho_e \delta \mathbf{a}) \, d\tau - \int \rho_e \delta \mathbf{a} \cdot \nabla \mathcal{N} \, d\tau, \end{aligned}$$

și atunci, potrivit teoremei Green-Gauss-Ostrogradski și convenției noastre privind extinderea la infinit a domeniului de integrare, putem scrie

$$\delta W_e = - \int \left[ \rho_e \mathbf{E} - \frac{1}{2} E^2 \nabla \epsilon + \frac{1}{2} \nabla \left( \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} E^2 \right) \right] \cdot \delta \mathbf{a} \, d\tau. \quad (1.166)$$

Din comparația relațiilor (1.161) și (1.166) rezultă atunci *densitatea forței ponderomotoare*

$$\mathbf{f}_e = \rho_e \mathbf{E} - \frac{1}{2} E^2 \nabla \epsilon + \frac{1}{2} \nabla \left( \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} E^2 \right). \quad (1.167)$$

Dacă în considerațiile precedente am fi ținut seama și de existența altor forțe, cum sunt, de pildă, cele gravitaționale sau cele de natură hidrostatică, atunci în membrul drept al expresiei (1.167) ar fi trebuit să adăugăm termenii corespunzători densităților acestor forțe.

Relația (1.167) se pretează unei interpretări interesante. După cum se cunoaște din mecanica fluidelor, forțele de volum de densitate  $\mathbf{f}$  se pot reprezenta cu ajutorul unui sistem de tensiuni aplicate pe suprafața ce mărginește domeniul volumic considerat din fluid, acestea din urmă formând un tensor de ordinul al doilea  $T_{ik}$ . Mărimile amintite sunt legate prin ecuațiile de mișcare ale unui mediu continuu deformabil, sub formă nedefinită (*ecuațiile lui Cauchy*)

$$\rho a_i = \rho F_i + \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}, \quad (1.168)$$

unde  $\mathbf{F}$  este *forța masică specifică*, prin urmare  $\rho\mathbf{F} = \mathbf{f}$ . În cazul echilibrului ( $\mathbf{a} = 0$ ), (1.167) conduce la :

$$f_i = - \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}. \quad (1.169)$$

Ghidându-ne după acest formalism, să proiectăm (1.167) pe direcția  $x_i$ . Utilizând teorema lui Gauss (1.93), avem :

$$(\mathbf{f}_e)_i = E_i \frac{\partial D_k}{\partial x_k} - \frac{1}{2} E^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} E^2 \right),$$

sau, dacă aranjăm termenii în mod convenabil și ținem seama că mediul este liniar, omogen și izotrop, iar  $\mathbf{E}$  este un câmp conservativ

$$(\mathbf{f}_e)_i = - \frac{\partial T_{ik}^{(e)}}{\partial x_k},$$

unde am notat, în baza similitudinii cu (1.169)

$$T_{ik}^{(e)} = -\epsilon E_i E_k + \frac{1}{2} E^2 \left( \epsilon - \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right) \delta_{ik}. \quad (1.170)$$

Cantitățile  $T_{ik}^{(e)}$  formează un tensor de ordinul al doilea, simetric, numit de către Maxwell *tensorul tensiunilor electrice*. Dacă  $\epsilon$  nu variază cu densitatea  $\rho$ , cel de al doilea termen din paranteză dispăre.

Anticipând, menționăm faptul că în cazul câmpului magnetostatic raționamentul este complet analog, calculele conducând la un *tensor al tensiunilor magnetice*, atribuit de asemenea lui Maxwell, sub forma

$$T_{ik}^{(m)} = -\mu H_i H_k + \frac{1}{2} H^2 \left( \mu - \rho \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right) \delta_{ik}. \quad (1.171)$$

**Aplicații.** Să presupunem că dielectricul este un fluid, caracterizat prin  $\rho_e = 0$  și  $\epsilon = \epsilon(\rho)$ . În acest caz, după cum se știe, mărimile  $\epsilon$  și  $\rho$  sunt legate prin *relația Clausius-Mosotti* :

$$\frac{\epsilon - \epsilon_o}{\epsilon + 2\epsilon_o} = \frac{C}{3} \rho ; \quad C = \frac{\alpha}{m}, \quad (1.172)$$

unde  $\alpha$  este polarizabilitatea moleculară, iar  $m$  masa unei molecule. Este ușor de verificat că expresia  $\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho}$ , care intervine în (1.170), se poate scrie atunci sub forma

$$\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} = \frac{1}{3\epsilon_o}(\epsilon - \epsilon_o)(\epsilon + 2\epsilon_o). \quad (1.173)$$

Să admitem, în particular, că dielectricul nostru este un lichid în echilibru, sub acțiunea forțelor electrostatică, hidrostatică și gravitațională, adică

$$\mathbf{f}_e + \mathbf{f}_{hidro} + \mathbf{f}_{grav} = 0. \quad (1.174)$$

Admițând, ca și până acum, că permitivitatea depinde doar de densitatea  $\rho$ , avem  $\nabla \epsilon = \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \nabla \rho$ , deci

$$\mathbf{f}_e = -\frac{1}{2}E^2 \nabla \epsilon + \frac{1}{2} \nabla \left( \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} E^2 \right) = \frac{1}{2} \rho \nabla \left( E^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right).$$

Ecuația de echilibru (1.174) devine atunci

$$\frac{1}{2} \rho \nabla \left( E^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right) - \nabla p + \rho g \nabla h = 0. \quad (1.175)$$

Să integrăm (1.175) în cazul dielectricului din Fig.1.15, în care se găsește scufundat parțial un condensator plan ale cărui plăci se află la o diferență de potențial statică. Întrucât la nivelul la care presiunea este  $p_o$  câmpul este nul, notând cu  $p$  presiunea hidrostatică la nivelul unde acționează câmpul  $\mathbf{E}$  și, în plus, neglijând acțiunea câmpului gravitațional, avem

$$p = p_o + \frac{1}{2} \rho \left( E^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right),$$

sau, în fine, dacă utilizăm (1.173)

$$p = p_o + \frac{1}{6\epsilon_o} E^2 (\epsilon - \epsilon_o)(\epsilon + 2\epsilon_o). \quad (1.176)$$

Ca urmare, la suprafața liberă a dielectricului lichid avem un surplus de presiune "hidrostatică", ceea ce face ca dielectricul să-și varieze (micșoreze) volumul, după cum este indicat în Fig.1.16. Fenomenul de variație (micșorare) a volumului unui dielectric sub acțiunea câmpului electrostatic poartă numele de *electrostricțiune*. Acest efect nu trebuie confundat cu cel de *piezoelectricitate inversă*, întâlnit exclusiv la mediile *anizotrope*.

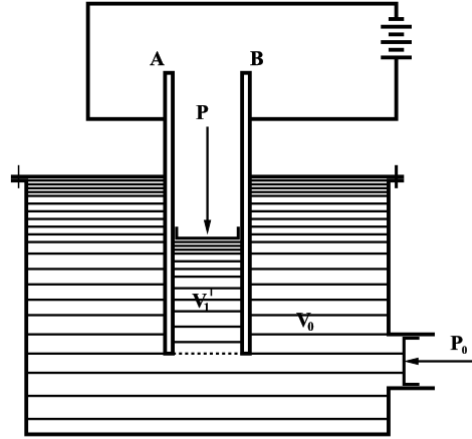


Fig 1.16

Electrostricțiunea are numeroase aplicații practice, între care menționăm posibilitatea unei variații ultrafine a diverselor straturi de dielectric, cum sunt de pildă dispozitivele numite *lame optice*.

**NOTĂ.** Fenomenul de *magnetostricțiune*, semnificând variația (micșorarea) volumului unui mediu sub acțiunea câmpului magnetostatic, se tratează în mod cu totul similar.

### PROBLEME

1. La distanța  $a(> R)$  de centrul unei sfere conductoare de rază  $R$ , în vid, se găsește o sarcină punctiformă  $q$ . Utilizând metoda imaginilor, să se determine distribuția sarcinilor pe sferă în următoarele cazuri:

- Sfera este izolată și neelectrizată ;
- Sfera este izolată și electrizată cu sarcina  $Q$  ;

- c) Sfera este legată la pământ și  $R \rightarrow \infty$  ;  
 d) Sfera este izolată, neutră și se află într-un câmp electric uniform de intensitate  $\mathbf{E}_0$ .

2. La distanța  $a(> R)$  de centrul unei sfere conductoare de rază  $R$ , legată la pământ, se găsește un dipol punctiform, de moment  $\mathbf{p}$ , așezat radial. Să se determine distribuția sarcinilor de influență pe suprafața sferei.

3. O sarcină punctiformă  $q$  se găsește în vid la distanța  $a$  de suprafața plană ce mărginește un spațiu dielectric de permitivitate relativă  $\epsilon_r$ . Să se determine forța care acționează asupra sarcinii  $q$ .

4. Un fir circular de rază  $c$  și densitate liniară de sarcină  $q/2\pi c$  se află în planul ecuatorial al unei sfere conductoare legate la pământ de rază  $a < c$ . Să se determine densitatea sarcinii induse pe sferă în aproximația  $(a/c)^2$ .

5. Admițând că potențialul pe suprafața unui cilindru circular de rază  $r = a$  depinde numai de  $\phi$  :  $V(a, z, \phi) = f(\phi)$ , unde  $f(\phi)$  este o funcție dată, să se determine potențialul în interiorul cilindrului. Se presupune că în interiorul cilindrului nu există surse.

6. Să se determine suprafețele echipotențiale și liniile de forță dacă  $U = \operatorname{Re}(\sqrt{z})$ . Ce contur, legat la pământ, corespunde acestui potențial?

7. Să se determine potențialul în apropierea elipsei  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , care se află legată la pământ. Să se analizeze cazul particular  $a = b$ .

## CAPITOLUL II

### CÂMPUL CURENȚILOR STAȚIONARI

#### A. Câmpul magnetostatic în vid

##### §2.1. Curentul electric staționar

Dacă la capetele  $A$  și  $B$  ale unui conductor se aplică o diferență de potențial  $V_A - V_B \neq 0$ , în conductor se va produce o deplasare dirijată de sarcini electrice, deci va circula un *curent electric*. Acesta există atât timp cât  $V_A \neq V_B$ . Dacă diferența de potențial este constantă în timp, curentul electric se numește *continuu* sau *staționar*.

Curentul electric se caracterizează prin *intensitatea* sa. Valoarea *instantanee*  $I$  a intensității se definește prin

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad (2.1)$$

adică este numeric egală cu sarcina ce trece în unitate de timp prin secțiunea conductorului. În Sistemul Internațional (SI), intensitatea curentului se măsoară în Amperi.

Pentru a caracteriza local curentul electric, adică într-un punct din interiorul conductorului străbătut de curent, se introduce mărimea fizică numită *densitate de curent*, definită prin relația

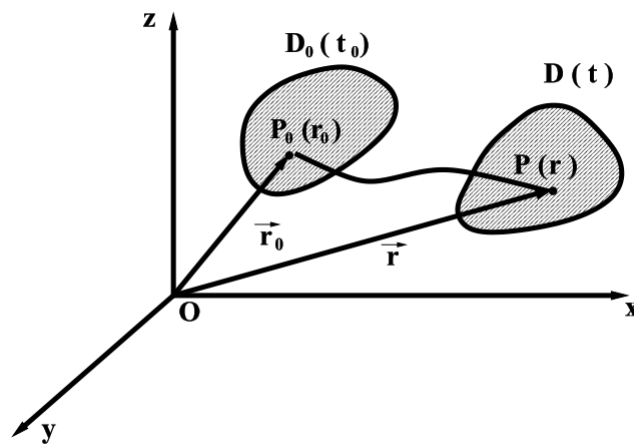
$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.2)$$

și prin condiția ca vectorul  $\mathbf{j}$  să aibă direcția și sensul de mișcare ale sarcinilor pozitive,  $S$  fiind aria secțiunii. Cu alte cuvinte, modulul densității de curent se definește ca fiind mărimea numeric egală cu intensitatea curentului ce străbate o suprafață de arie unitate, dispusă ortogonal la direcția deplasării sarcinilor.

Dacă  $|\mathbf{j}| = \text{const.}$  și  $\mathbf{j} \parallel d\mathbf{S}$ , din (2.2) rezultă  $j = I/S$ . Dacă  $S \rightarrow 0$  iar  $I$  este finit, rezultă  $j \rightarrow \infty$ . Prin urmare, un curent liniar prezintă o linie de singularitate pentru mărimea  $\mathbf{j}$ .

### Legi fundamentale

1. **Ecuția de continuitate.** Unul dintre principiile fundamentale ale fizicii este legea conservării sarcinii electrice (a masei de substanță etc.). Acest principiu se exprimă cantitativ prin *ecuația de continuitate*.



**Fig. 2.1.**

Fie  $Q$  sarcina electrică conținută la un moment dat  $t_0$ , într-un domeniu  $D_0$ , de volum  $V_0$ , mărginit de suprafața  $S_0$  și distribuită în mod continuu cu densitatea  $\rho(\mathbf{r}_0, t_0)$ . Odată cu trecerea timpului, forma și dimensiunile domeniului variază, astfel că la momentul  $t$  aceeași sarcină va ocupa domeniul  $D$ , de volum  $V$ , mărginit de suprafața  $S$ , densitatea într-un punct oarecare din  $D$  fiind  $\rho(\mathbf{r}, t)$  (Fig.2.1). Invarianța sarcinii

se exprimă prin  $Q(t_o) = Q(t)$ , adică

$$\int_{V_o} \rho(\mathbf{r}_o, t_o) d\tau_o = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) d\tau, \quad (2.3)$$

în care densitatea  $\rho$ , spre deosebire de cazul static, depinde atât de poziție cât și de timp. Pentru a stabili o legătură între  $\rho(\mathbf{r}_o, t_o)$  și  $\rho(\mathbf{r}, t)$ , observăm că poziția unei particule  $P$ , la momentul  $t$ , depinde atât de timp, cât și de poziția sa inițială  $\mathbf{r}_o$  la momentul  $t_o$ , adică

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_o, t). \quad (2.4)$$

Vom presupune că unei particule  $P_o$  din  $D_o$  îi corespunde o singură particulă  $P$  din  $D$  și reciproc (corespondență biunivocă). Matematic, această condiție se exprimă prin aceea că determinantul funcțional (jacobianul) transformării (2.4) este diferit de zero :

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(x_1^o, x_2^o, x_3^o)} \neq 0. \quad (2.5)$$

Revenind la condiția (2.3), să efectuăm în membrul drept schimbarea de variabilă (2.4), cu scopul de a avea același domeniu de integrare în ambii membri. În acest caz

$$d\tau = dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(x_1^o, x_2^o, x_3^o)} dx_1^o dx_2^o dx_3^o = J d\tau_o, \quad (2.6)$$

și atunci, dacă notăm  $\rho(\mathbf{r}_o, t_o) = \rho_o$ ,  $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho$ , relația (2.3) se poate scrie sub forma

$$\int_{V_o} (\rho_o - J\rho) d\tau_o = 0.$$

Întrucât această egalitate trebuie să aibă loc pentru orice  $V_o$ , rezultă că integrandul trebuie să fie identic nul, adică

$$J\rho = \rho_o. \quad (2.7)$$

Aceasta este una dintre formele sub care este cunoscută *ecuația de continuitate* și aparține lui D'Alembert.



Ecuția de continuitate se poate scrie și sub o altă formă, constând într-o ecuație cu derivate parțiale de ordinul întâi, frecvent întâlnită în teoria electricității, în mecanica fluidelor etc. Pentru aceasta, să derivăm (2.7) total în raport cu timpul. Ținând seama de semnificația mărimilor  $\rho_o$  și  $\rho$ , avem:

$$\rho \frac{dJ}{dt} + J \frac{d\rho}{dt} = 0. \quad (2.8)$$

Pentru a exprima derivata jacobianului, să-l scriem sub forma

$$J = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial x_j^o} A_i^j, \quad (2.9)$$

unde  $A_i^j$  este complementul algebric al elementului  $\frac{\partial x_i}{\partial x_j^o}$  din determinantul  $J$ , iar dezvoltarea lui  $J$  s-a efectuat după elementele liniei  $i$ . (N.B. În 2.9 nu se însumează după indicele  $i$ ). După cum se știe, dacă în  $J$  înlocuim elementele liniei  $i$  cu elementele altei linii, de pildă  $k$ , determinantul  $J$  se anulează. Relația (2.9) se mai poate scrie atunci sub forma

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_k}{\partial x_j^o} A_i^j = J \delta_{ik}. \quad (2.10)$$

Ținând seama de regula de derivare a determinantilor, avem

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \sum_i \sum_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial x_j^o} \right) A_i^j = \\ &= \sum_i \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j^o} \left( \frac{dx_i}{dt} \right) A_i^j = \sum_i \sum_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j^o} A_i^j, \end{aligned}$$

unde  $v_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sunt componentele vitezei instantanee a unei particule electrizate, a cărei mișcare o urmărim în timp. Având în vedere (2.10), mai putem scrie

$$\frac{dJ}{dt} = \sum_i \sum_j \sum_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_j^o} A_i^j = J \sum_i \sum_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \delta_{ik} =$$

$$= J \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = J \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (2.11)$$

formulă stabilită de *Euler*. Înlocuind (2.11) în (2.8) și simplificând prin  $J \neq 0$ , găsim

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2.12)$$

Dar, întrucât  $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ ,

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho$$

și atunci, având în vedere (A.40), relația (2.12) se mai scrie

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.13)$$

care este *forma diferențială* a ecuației de continuitate, aparținând lui *Euler*. După cum se observă, ecuația cu derivate parțiale de ordinul întâi (2.13) leagă câmpul vitezelor  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  de cel al densității  $\rho(\mathbf{r}, t)$ .

Interpretarea fizică a ecuației de continuitate iese în evidență prin integrarea lui (2.13) pe un domeniu tridimensional fix (în raport cu observatorul)  $D$ , de volum  $V$ , mărginit de suprafața  $S$  :

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = - \int_V \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) d\tau,$$

sau, dacă ținem seama că domeniul de integrare este fix și aplicăm teorema Green-Gauss-Ostrogradski (A.29),

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho d\tau = - \oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.14)$$

Această relație exprimă, sub formă integrală, legea conservării sarcinii electrice : *viteza de variație a sarcinii din domeniul  $D$  este egală cu diferența dintre sarcina care iese și cea care intră, în unitate de timp, prin suprafața  $S$  ce mărginește domeniul*. O altă formulare este

următoarea : sarcina părăsește domeniul  $D$ , în unitate de timp, ca flux al câmpului vectorial  $\rho \mathbf{v}$  prin suprafața limitrofă  $S$ .

Semnificația fizică a câmpului vectorial  $\rho \mathbf{v}$  iese în evidență dacă observăm că direcția sa coincide cu cea a vitezei, iar mărimea vectorului reprezintă sarcina pozitivă ce traversează, în unitate de timp, o arie egală cu unitatea, dispusă ortogonal la direcția vitezei:

$$[\rho v] = \left[ \frac{Q}{V} \frac{l}{t} \right] = \left[ \frac{I}{S} \right] = [j].$$

Prin urmare,  $\rho \mathbf{v}$  este tocmai densitatea de curent  $\mathbf{j}$ , iar ecuația de continuitate (2.13) se mai poate scrie sub forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (2.15)$$

**2. Legea lui Ohm.** Se constată experimental că raportul dintre diferența de potențial (tensiunea)  $\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2 \neq 0$  ce se stabilește între două puncte ale unui conductor și intensitatea  $I$  a curentului care circulă prin conductor ca urmare a existenței acestei tensiuni, în anumite limite de temperatură și presiune, este o constantă  $R$  numită *rezistență electrică*:

$$\frac{\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2}{I} = R = \text{const.} \quad (2.16)$$

Relația (2.16) exprimă *legea lui Ohm* sub formă integrală (finită), relativă la o porțiune de circuit omogen.

Rezistența electrică a unui conductor, presupus omogen și de secțiune constantă, depinde de natura, forma și dimensiunile conductorului prin relația

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (2.17)$$

unde  $l$  este lungimea conductorului,  $S$  - aria secțiunii acestuia, iar  $\rho$  *rezistivitatea* materialului din care este alcătuit conductorul. Inversul rezistivității se notează cu  $\lambda$  și se numește *conductivitate electrică* :  $\lambda =$

$1/\rho$ . În cazul unui câmp conservativ, legea lui Ohm pentru o porțiune de circuit omogen, sub formă integrală, se va scrie

$$\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2 = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = R I. \quad (2.18)$$

Să stabilim, în continuare, forma *diferențială* (sau *locală*) a legii lui Ohm pentru o porțiune de circuit. Utilizând (2.18), avem

$$\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 E_l dl = I \frac{l}{\lambda S} = j \frac{l}{\lambda}.$$

Dacă modelul de studiu este un conductor cilindric, omogen și izotrop, atunci  $E_l = \text{const.}$ , iar orientarea vectorilor  $\mathbf{j}$  și  $\mathbf{E}$  este aceeași, prin urmare putem scrie

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}, \quad (2.19)$$

care este forma *diferențială* a legii lui Ohm. Ea este valabilă și în cazul câmpurilor variabile, precum și în cazul conductoarelor izotrope neomogene. Sub această formă legea lui Ohm exprimă faptul că, dacă într-un punct al unui conductor există un câmp  $\mathbf{E} \neq 0$ , atunci există și un curent a cărui densitate este  $\mathbf{j}$ . În cazul conductoarelor anizotrope, conductivitatea are proprietățile unui tensor simetric  $\lambda_{ik}$ , iar legea lui Ohm se scrie

$$j_i = \lambda_{ik} E_k \quad (i, k = 1, 2, 3). \quad (2.20)$$

Dacă într-un conductor acționează numai forțe coulombiene, după un timp foarte scurt potențialul devine același în toate punctele conductorului, prin urmare nu mai există curent electric. De aceea, pentru a menține curentul în conductor este necesar să existe un câmp de forțe de natură neelectrostatică (mecanică, chimică, termică, nucleară etc.), pe care îl vom numi *câmpul forțelor exterioare*  $\mathbf{E}^{ext}$ . Legea lui Ohm (2.19) capătă atunci forma

$$\mathbf{j} = \lambda(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{ext}), \quad (2.21)$$

numită *legea generalizată a lui Ohm* sub formă locală. Aceeași lege, sub formă integrală, se va scrie

$$\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_1^2 \mathbf{E}^{ext} \cdot d\mathbf{l} = R I. \quad (2.22)$$

Integrala  $\int_1^2 \mathbf{E}^{ext} \cdot d\mathbf{l}$  este *tensiunea electromotoare* între punctele 1 și 2.

**3. Legea Joule - Lenz.** Această lege se referă la efectul caloric al curentului electric. După cum se cunoaște, forma integrală a legii este

$$W = (N_1 - N_2) I t = R I^2 t ; \quad P = R I^2. \quad (2.23)$$

Pentru a scrie legea Joule-Lenz sub formă diferențială, să definim *densitatea de putere*  $p$  a curentului electric prin  $P = \int p d\tau$ , unde  $P$  este puterea curentului, iar  $dV$  un element din volumul  $V$  al conductorului în care are loc degajarea de căldură. Presupunând conductorul un cilindru omogen, de secțiune  $S$  și lungime  $l$ , avem

$$p = \frac{R I^2}{S l} = \frac{1}{\lambda} E^2 ; \quad P = \int_V \frac{j^2}{\lambda} d\tau. \quad (2.24)$$

Utilitatea acestor legi fundamentale va fi evidențiată în cele ce urmează.

## §2.2. Câmpul magnetic al curentului electric staționar

În anul 1820 *Christian Oersted* pune în evidență efectul magnetic al curenților staționari. Se constată astfel că interacțiunile dintre curenți, precum și cele dintre curenți și magneții permanenți sunt de aceeași natură cu interacțiunile dintre corpurile magnetizate.

Câmpul magnetic al curenților staționari este un *câmp magnetostatic*: el poate varia de la un punct la altul, dar este constant în timp. Un astfel de câmp poate beneficia de aceeași descriere cantitativă ca și câmpul electrostatic, cu observația că între cele două grupe de fenomene există o deosebire esențială, legată de inexistența sarcinilor magnetice libere.

Se constată experimental că, la distanțe mari, câmpul magnetic produs de un curent circular are aceleași proprietăți ca și cel creat de un magnet permanent (dipol magnetic).

Dintre legile fundamentale ce descriu acțiunea magnetică a curentului electric staționar amintim următoarele două:

**Legea Biot-Savart-Laplace** exprimă intensitatea  $\mathbf{H}$  a câmpului magnetic produs de un curent electric staționar de intensitate  $I$ , într-un punct  $P$  (Fig.2.2) :

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \int_C \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (2.25)$$

Aici  $d\mathbf{l}$  este un element orientat din conturul (firul) prin care circulă curentul,  $I d\mathbf{l}$  este un *element de curent*,  $\mathbf{r}$  este vectorul de poziție al punctului  $P$  în raport cu elementul de curent, iar  $C$  este conturul curentului (AB în Fig.2.2).

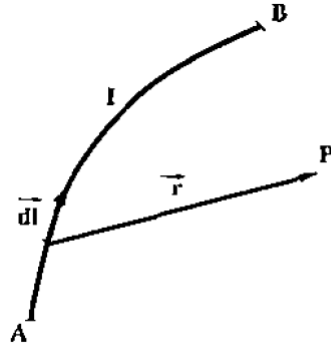


Fig. 2.2.

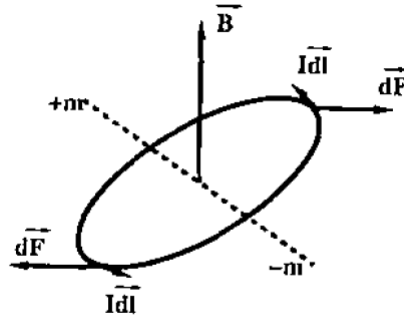


Fig 2.3.

Legea (2.25) se poate exprima și sub o altă formă, cu ajutorul densității de curent  $\mathbf{j}$ . Observând că

$$I d\mathbf{l} = j S d\mathbf{l} = \mathbf{j} S d\mathbf{l} = \mathbf{j} d\tau,$$

avem

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3} d\tau, \quad (2.26)$$

unde  $V$  este volumul ocupat de curent.

Produsul  $\mu_o \mathbf{H}$ , unde  $\mu_o$  este permeabilitatea vidului, se notează cu  $\mathbf{B}$  și se numește *vectorul inducție magnetică* sau, prescurtat, *inducția magnetică* a vidului.

**Legea lui Laplace** dă forța ce acționează asupra unui circuit  $C$ , parcurs de un curent de intensitate  $I$ , din partea unui câmp de inducție

magnetică  $\mathbf{B}$ . Să considerăm un circuit  $C$  (echivalent, după cum știm, cu un dipol magnetic), plasat în câmpul  $\mathbf{B}$  (Fig.2.3). Acesta va acționa asupra dipolului, orientându-l în direcția câmpului. Cum asupra fiecărui element de curent va acționa forța elementară  $I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ , asupra întregului circuit se va exercita forța

$$\mathbf{F} = \oint_C I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}. \quad (2.27)$$

### §2.3. Dipolul magnetic

Un circuit elementar este echivalent în comportare cu un dipol magnetic, de moment  $\mathbf{m} = I \mathbf{S}$ , unde  $\mathbf{S}$  este suprafața orientată a spirei, al cărei sens este dat de regula burghiului, iar  $I$  este intensitatea curentului care circulă prin circuit. Un circuit de dimensiuni finite poate fi acoperit cu o rețea imaginară, astfel ca în fiecare ochi să se găsească câte un circuit elementar, deci un dipol de moment  $I \mathbf{S}$ . Un asemenea sistem este, așadar, un strat dublu magnetic, numit *foiță magnetică*.

Având în vedere analogia aproape perfectă dintre dipolul electric și cel magnetic, să trecem în revistă unele mărimi esențiale necesare în studiul celui din urmă.

*Momentul magnetic dipolar* se definește prin relația  $\mathbf{m} = \mathcal{M} \mathbf{l}$ , unde  $\mathcal{M}$  este masa magnetică fictivă.

*Potențialul scalar* într-un punct al câmpului produs de dipolul magnetic va fi

$$\mathcal{N}_m = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\mu_o}{4\pi} \mathbf{m} \cdot \nabla \left( \frac{1}{r} \right), \quad (2.28)$$

care permite calcularea *câmpului*  $\mathbf{B}$  produs de dipol:

$$\mathbf{B} = -\nabla \mathcal{N}_m = \frac{\mu_o}{4\pi} \left[ \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right]. \quad (2.29)$$

*Rezultanta forțelor* cu care câmpul  $\mathbf{B}$  acționează asupra unui dipol este  $\mathbf{R}_m = \mathcal{M}(\mathbf{l} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ , iar pentru un câmp uniform

$$\mathbf{R}_m = \mathbf{m} \times \mathbf{B}. \quad (2.30)$$

*Energia* dipolului magnetic într-un câmp exterior are expresia

$$W_m = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}. \quad (2.31)$$

*Potențialul* într-un punct al câmpului produs de un strat dublu magnetic se scrie

$$\mathcal{N}_m = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_S \tau_m d\Omega, \quad (2.32)$$

iar dacă stratul dublu este omogen

$$\mathcal{N}_m = \frac{\mu_o}{4\pi} \tau_m \Omega. \quad (2.33)$$

*Putința*  $\tau_m$  a unui strat dublu magnetic este  $I$ , prin urmare

$$\mathcal{N}_m = \frac{\mu_o}{4\pi} I \Omega. \quad (2.34)$$

## §2.4. Teorema lui Ampère

Să calculăm circulația câmpului  $\mathbf{H}$  de-a lungul unui contur închis (C), ce înconjoară un curent de intensitate  $I$  (Fig.2.4). Admițând că observatorul (cel ce efectuează determinările) se află într-un punct fix  $O$ , diferit de punctul  $P$  în care se calculează câmpul, legea Biot-Savart-Laplace (2.26) se va scrie

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\tau'. \quad (2.35)$$

Operatorul  $\nabla$  se aplică numai asupra funcțiilor scalare și vectoriale ce depind de  $\mathbf{r}$  (și nu de  $\mathbf{r}'$ ), prin urmare

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right),$$

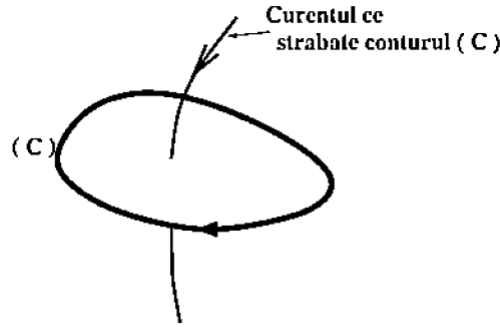
deci putem scrie

$$\nabla \times \left( \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') - \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right).$$



Primul termen din membrul drept este nul, aşadar (2.35) se va scrie sub forma

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \nabla \times \left( \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\tau' = \nabla \times \left[ \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' \right]. \quad (2.36)$$



**Fig. 2.4.**

Înmulțind (2.36) cu  $\mu_o$ , vom scrie

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.37)$$

unde am notat

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau'. \quad (2.38)$$

Câmpul vectorial  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  se numește *potențial vector* al câmpului vectorial staționar  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ . Semnificația acestei definiții va fi evidențiată în paragraful următor. Aici menționăm doar faptul că, dacă distribuția curenților este atât de volum cât și de suprafață, prin analogie cu situația întâlnită în electrostatică, vom scrie potențialul vector sub forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' + \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS', \quad (2.38')$$

unde  $\mathbf{i}(\mathbf{r})$  este *densitatea liniară de curent*, cu alte cuvinte intensitatea curentului repartizată pe unitate de lungime

$$I = \int_1^2 \mathbf{i} \cdot d\mathbf{l}.$$

Revenind la relația (2.36), să-i aplicăm operatorul *rotor*. Utilizând formula (A.48), avem

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi} \left[ \nabla \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\tau' - \right. \\ & \left. - \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \Delta \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\tau' \right].\end{aligned}$$

Dar, potrivit lui (1.39) și (1.43),

$$\Delta \left( \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'); \quad \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right),$$

și atunci, integrând prin părți primul termen din paranteza pătrată și extinzând domeniul de integrare asupra întregului spațiu, găsim :

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \nabla \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') d\tau' + \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\tau'.$$

Întrucât câmpul este staționar, potrivit ecuației de continuitate (2.15), primul termen se anulează. Utilizând în cel de al doilea termen proprietatea de filtraaj a distribuției *delta*, obținem în definitiv

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r}), \quad (2.39)$$

care exprimă *teorema lui Ampère sub formă diferențială*. Dacă integrăm această relație pe o suprafață  $S$  ce se sprijină pe un contur închis  $C$ , astfel ca acesta să cuprindă (să fie "înțepat" de) curentul de densitate  $\mathbf{j}$ , avem

$$\int_S \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = I$$

sau, dacă aplicăm teorema Stokes-Ampère (A.31),

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I, \quad (2.40)$$

care este *forma integrală a teoremei lui Ampère*.

Așadar, circulația câmpului  $\mathbf{H}$  de-a lungul unui contur închis, care cuprinde un curent de intensitate  $I$ , nu depinde decât de intensitatea curentului. Se poate arăta că, în cazul în care conturul nu cuprinde curentul, circulația este nulă.

## §2.5. Potențialul vector al câmpului curentului staționar

Să transcriem relația (2.37) obținută în paragraful precedent

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.41)$$

Aplicând divergența acestei relații, în virtutea formulei (A.45), avem

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 ; \quad (\nabla \cdot \mathbf{H} = 0). \quad (2.42)$$

Prin urmare, câmpul  $\mathbf{B}$  este un câmp *solenoidal* (fără surse), liniile unui astfel de câmp fiind curbe închise. Acest rezultat se poate deduce și pe altă cale, anume scriind teorema lui Gauss pentru un sistem de  $N$  sarcini magnetice fictive :

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_o \sum_i \mathcal{M}_i = 0$$

și aplicând Formula Green-Gauss-Ostrogradski.

Observăm că potențialul vector  $\mathbf{A}$  nu este definit în mod unic prin relația (2.41). Într-adevăr, dacă în loc de  $\mathbf{A}$  alegem

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi, \quad (2.43)$$

unde  $\psi$  este o funcție arbitrară de coordonate, obținem același câmp :

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times (\nabla\psi) = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}. \quad (2.24)$$

Faptul că din  $\mathbf{A}$  și  $\mathbf{A}'$  rezultă același câmp  $\mathbf{B}$  se numește *invariantă de etalon*, iar relația (2.43) poartă numele de *transformare de etalon*.

Aceste observații conduc la concluzia că, pentru a fi definit în mod unic, potențialul vector  $\mathbf{A}$  trebuie supus unei condiții suplimentare, de forma

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \chi, \quad (2.45)$$

unde  $\chi$  este o funcție dată :  $\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}' = \chi$ . Aplicând divergența lui (2.43) găsim atunci

$$\Delta \psi = 0, \quad (2.47)$$

deci  $\psi$  trebuie să fie o *funcție armonică*. Pentru a determina în mod unic potențialul vector, în afară de relația de definiție (2.42) și condiția (2.45), este necesar să cunoaștem valorile acestuia pe suprafața ce mărginește domeniul în care este definit câmpul.

Dacă introducem (2.41) în teorema lui Ampère (2.39) și alegem  $\chi = 0$  în (2.45), obținem următoarea ecuație cu derivate parțiale, de ordinul al doilea, pe care o satisface potențialul vector :

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_o \mathbf{j}, \quad (2.47)$$

analoagă ecuației lui Poisson din electrostatică (1.35). Soluția ecuației (2.47) este dată de (2.38) și este, la rândul ei, analoagă expresiei potențialului scalar al unei distribuții continue de sarcini electrice

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau'.$$

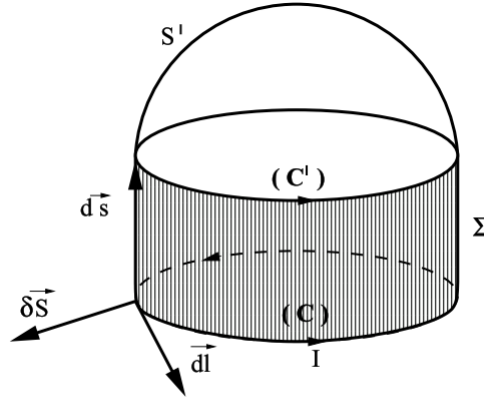
## §2.6. Energia câmpului magnetic al curenților staționari

Să calculăm, pentru început, energia potențială a unui circuit ( $C$ ) parcurs de un curent electric staționar de intensitate  $I$ , în câmpul de inducție magnetică  $\mathbf{B}$ . Forța cu care câmpul  $\mathbf{B}$  acționează asupra curentului este dată de legea lui Laplace (2.27)

$$\mathbf{F} = I \oint d\mathbf{l} \times \mathbf{B}.$$

Sub acțiunea acestei forțe, circuitul ( $C$ ) va suferi o deplasare elementară  $d\mathbf{s}$  (Fig.2.5), efectuând lucrul mecanic elementar

$$\delta L = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = I \oint \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{s} \times d\mathbf{l}).$$



**Fig. 2.5.**

Dar  $d\mathbf{s} \times d\mathbf{l} = -\delta\mathbf{S}$ , unde  $\delta\mathbf{S}$  este un element orientat al suprafeței  $\Sigma$ , descrisă de conturul ( $C$ ) în urma deplasării, deci

$$\delta L = - I \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{S}.$$

Putem alege suprafața  $\Sigma$  astfel încât să fie egală cu diferența dintre suprafața  $S$  ce se sprijină pe conturul  $C$  și trece prin  $C'$  și suprafața  $S'$ , care se sprijină pe  $C'$  și, cu excepția lui  $\Sigma$ , coincide cu  $S$ . Așadar

$$\delta L = - I \left[ \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} - \int_{S'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \right] = - I \delta \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S},$$

sau, dacă aplicăm teorema Stokes-Ampère (A.31),

$$\delta L = - I \delta \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}.$$

Energia potențială a circuitului  $C$  în câmpul  $\mathbf{B}$  este deci

$$W_m = I \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}. \quad (2.48)$$

Dacă circuitul nu este liniar, putem trece la o integrală pe domeniul ocupat de curent prin substituția (vezi 2.2)  $I d\mathbf{l} \rightarrow \mathbf{j} d\tau$ , prin urmare

$$W_m = \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} d\tau. \quad (2.49)$$

Amintindu-ne procedeul prin care am dedus energia câmpului electrostatic, observăm că  $\mathbf{B}$ , la rândul său, este creat de un curent de densitate  $\mathbf{j}'$ , care în câmpul  $\mathbf{B}'$  al circuitului  $C'$ , are energia potențială

$$W'_m = \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{j}' d\tau.$$

Cum  $W_m = W'_m$ , energia sistemului este

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} d\tau, \quad (2.50)$$

unde integrala se extinde asupra domeniului ocupat de ambii curenți.

Utilizând teorema lui Ampère (2.39), mai avem :

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{H} d\tau = \frac{1}{2} \int_V \nabla \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) d\tau + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{A} d\tau.$$

Prima integrală din membrul drept se poate transforma într-o integrală de suprafață, conform teoremei Green-Gauss-Ostrogradski (A.29). Extinzând domeniul de integrare asupra întregului spațiu, aceasta se va anula. Rezultă atunci

$$W_m = \frac{1}{2} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} d\tau, \quad (2.51)$$

relație analoagă celei care exprimă energia câmpului electrostatic.

## §2.7. Multipoli magnetici

Multipolul magnetic se definește prin analogie cu cel electric, cu observația că aici nu putem vorbi de monopol magnetic. Având în

vedere această deosebire esențială dintre cele două modele, vom defini multipolul magnetic ca un sistem de dipoli magnetici situați la distanțe mutuale foarte mici (în sensul celor discutate în Cap.I).

Utilizând procedeul din §1.8, vom dezvolta în serie  $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$  din relația (2.38). Pentru a facilita urmărirea succesiunii calculelor, să transcriem relația (1.78) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} &= \frac{1}{r} - \frac{x'_i}{1!} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{2!} x'_i x'_k \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left( \frac{1}{r} \right) - \dots = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} (\mathbf{r}' \cdot \nabla)^{(l)} \left( \frac{1}{r} \right). \end{aligned}$$

Avem atunci, pentru componenta  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) a potențialului vector

$$\begin{aligned} A_i(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_o}{4\pi} \left[ \frac{1}{r} \int_V j_i(\mathbf{r}') d\tau' + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \int_V \mathbf{r}' j_i(\mathbf{r}') d\tau' + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{6} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \left( \frac{1}{r} \right) \int (3x'_j x'_k - r'^2 \delta_{jk}) j_i(\mathbf{r}') d\tau' + \dots \right] = \\ &= A_i^{(0)} + A_i^{(1)} + A_i^{(2)} + \dots, \end{aligned} \quad (2.52)$$

în care prin  $\mathbf{A}^{(0)}, \mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}^{(2)}$  am notat, respectiv, potențialul vector monopolar, dipolar, cuadrupolar etc. ai curenților electrici staționari. Sintetic, această relație se scrie sub forma

$$A_i(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \int_V j_i(\mathbf{r}') (\mathbf{r}' \cdot \nabla)^{(l)} \left( \frac{1}{r} \right) d\tau'. \quad (2.52')$$

În cele ce urmează vom calcula primii doi termeni din (2.52). În acest scop vom arăta că, dacă  $f(\mathbf{r}')$  și  $g(\mathbf{r}')$  sunt două funcții "cum-secade" (continue, derivabile etc.), atunci

$$\int \left[ f \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' g + g \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' f \right] d\tau' = 0. \quad (2.53)$$

Pentru a dovedi valabilitatea relației (2.53), să integrăm prin părți cel de al doilea termen. Avem :

$$\int f \mathbf{j} \cdot \nabla' g \, d\tau' + \int \nabla' \cdot (g f \mathbf{j}) \, d\tau' - \int f \mathbf{j} \cdot \nabla' g \, d\tau' = 0,$$

în care am ținut seama că  $\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$ , deoarece curenții  $\mathbf{j}$  sunt localizați și staționari, iar integrala din mijloc se poate transforma într-o integrală de suprafață, prin procedeul cunoscut, care, extinsă la întregul spațiu, se anulează.

Să alegem  $f = 1$ ,  $g = x'_i$  în (2.53). Rezultă atunci :

$$\int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \, d\tau' = 0, \quad \mathbf{A}^{(0)} = 0, \quad (2.54)$$

rezultat previzibil, dacă ne amintim că *nu există monopol magnetic*.

Fie, de data aceasta,  $f = x'_i$ ,  $g = x'_k$  în (2.53). Avem :

$$\int (x'_i j_k + x'_k j_i) \, d\tau' = 0.$$

Componenta după direcția  $x_i$  a potențialului vector dipolar  $\mathbf{A}^{(1)}$  se scrie atunci

$$\begin{aligned} A_i^{(1)} &= \frac{\mu_o}{4\pi} \left[ \frac{1}{r^3} x_k \int x'_k j_i \, d\tau' \right] = \frac{\mu_o}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r^3} \left[ \frac{1}{2} x_k \int (x'_k j_i - x'_i j_k) \, d\tau' \right] \right\} = \\ &= \frac{\mu_o}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r^3} \left[ \frac{1}{2} \varepsilon_{kil} x_k \int (\mathbf{r}' \times \mathbf{j})_l \, d\tau' \right] \right\} = \\ &= \frac{\mu_o}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r^3} \left[ \varepsilon_{ilk} \left( \frac{1}{2} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{j} \, d\tau' \right)_l x_k \right] \right\} = \\ &= \frac{\mu_o}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r^3} \left[ \left( \frac{1}{2} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{j} \, d\tau' \right) \times \mathbf{r} \right]_i \right\}. \end{aligned}$$

Prin definiție, expresia

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') \, d\tau' \quad (2.55)$$



se numește *moment magnetic dipolar* al distribuției continue de curenți staționari, prin urmare

$$A_i^{(1)} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{1}{r^3} (\mathbf{m} \times \mathbf{r})_i,$$

sau, vectorial:

$$\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{1}{r^3} (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) \quad (2.56)$$

Câmpul  $\mathbf{B}^{(1)}$  al dipolului magnetic (multipol de ordinul unu) se găsește aplicând relația (2.37). În virtutea formulei (A.41), avem

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{(1)} &= \frac{\mu_o}{4\pi} \nabla \times \left( \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \right) = \\ &= \frac{\mu_o}{4\pi} \left[ \frac{1}{r^3} \nabla \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) + \nabla \left( \frac{1}{r^3} \right) \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) \right]. \end{aligned}$$

Efectuând calculele, găsim

$$\mathbf{B}^{(1)} = \frac{\mu_o}{4\pi} \left[ \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right], \quad (2.57)$$

expresie analoagă celei a câmpului dipolului electric. Notând cu  $\mathbf{s}$  versorul lui  $\mathbf{r}$ , mai putem scrie

$$\mathbf{B}^{(1)} = \frac{\mu_o}{4\pi r^3} [3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{s})\mathbf{s} - \mathbf{m}]. \quad (2.58)$$

Remarcăm faptul că același rezultat se găsește dacă, prin analogie cu potențialul câmpului electrostatic, definim potențialul *scalar* al câmpului magnetostatic prin (vezi 2.28)

$$\mathcal{N}_m = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (2.59)$$

și calculăm câmpul de inducție după formula

$$\mathbf{B}^{(1)} = -\nabla \mathcal{N}_m. \quad (2.60)$$

S-ar părea că relația (2.60) vine în contradicție cu teorema lui Ampère : în conformitate cu (2.60),  $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ , în timp ce potrivit teoremei lui Ampère  $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_o \mathbf{j}$ . În realitate nu există nici o contradicție, deoarece în teorema lui Ampère circulația se ia pe un contur închis ce cuprinde curenți, pe când relația (2.60) este aplicată pentru cazul în care circulația este calculată la distanță mare de circuit, conturul nefiind străbătut de curent ( $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$ ). În cele ce urmează noi vom exprima câmpul  $\mathbf{B}$  exclusiv cu ajutorul potențialului vector  $\mathbf{A}$ .

### Observații

a) Dacă circuitul este plan, momentul magnetic  $\mathbf{m}$  este ortogonal pe suprafața circuitului. Punând în (2.55)  $I d\mathbf{l}$  în loc de  $\mathbf{j} d\tau$ , găsim

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} I \oint \mathbf{r}' \times d\mathbf{l}' = I \mathbf{S}, \quad (2.61)$$

unde  $S$  este aria plană închisă de circuit, indiferent de forma acestuia.

b) Utilizând relația (2.52'), putem scrie potențialul vector al distribuției de dipoli magnetici sub forma condensată

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(l+1)!} \mathcal{M}_{i_1 \dots i_l} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_l} \left( \frac{1}{r} \right), \quad (2.62)$$

unde

$$\mathcal{M}_{i_1 \dots i_l} = (l+1) \int_V x'_{i_1} \dots x'_{i_l} \mathbf{j}(\mathbf{r}') d\tau' \quad (2.63)$$

este tensorul moment magnetic multipolar de ordinul  $2^l$ .

## PROBLEME

1. Să se găsească expresia potențialului vector și cea a potențialului scalar pentru câmpul magnetic creat de un curent rectiliniu infinit, de intensitate  $I$ .

2. Să se arate că liniile de forță ale câmpului magnetic creat în vid de un curent filiform plan, de formă oarecare, sunt curbe simetrice față de planul circuitului.

3. Fie un poligon regulat, cu  $n$  laturi, înscris în cercul de rază  $R$ . Prin conturul poligonal trece curentul staționar de intensitate  $I$ . Să se calculeze câmpul magnetic în centrul poligonului, precum și într-un punct oarecare pe axa poligonului, la distanța  $z$  de centrul acestuia.

4. Să se arate că forța de interacțiune dintre două circuite electrice ( $C_1$ ) și ( $C_2$ ), străbătute de curenții  $I_1$ , respectiv  $I_2$ , satisface principiul acțiunii și reacțiunii, în timp ce forța dintre două elemente de circuit (aparținând lui ( $C_1$ ) și ( $C_2$ )) nu satisface acest principiu.

5. Un conductor rectiliniu infinit, de rază  $R$ , este parcurs de un curent de densitate  $a/\rho$  pentru  $\rho \leq R$ , unde  $a$  este o constantă, iar  $\rho$  distanța până la axul conductorului. Să se determine potențialul vector și intensitatea câmpului magnetic în interiorul și exteriorul conductorului.

6. O sferă de rază  $R$  se rotește în jurul axei  $z$  cu viteza unghiulară  $\Omega$ . Suprafața sferei este încărcată cu electricitate de densitate superficială  $\sigma$ . Să se determine potențialul vector și intensitatea câmpului magnetic în interiorul și exteriorul sferei.

## B. Câmpul magnetostatic în medii magnetizabile

### §2.8. Medii magnetice polarizate

Se constată experimental că orice substanță, introdusă într-un câmp magnetic, se *polarizează magnetic*. Considerațiile ce urmează au la bază concepția lui Ampère privind echivalența dintre curenții moleculari (elementari) și dipolii magnetici.

Studiul polarizării magnetice se realizează cu ajutorul unor mărimi și definiții similare celor întâlnite la polarizarea dielectricilor, cu diferența – deja menționată cu alt prilej – că nu există monopol magnetic. Una dintre aceste mărimi este *intensitatea de magnetizare* sau *vectorul de polarizare magnetică*

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{M}}{\Delta\tau} = \frac{d\mathbf{m}}{d\tau} ; \quad d\mathbf{m} = \mathbf{M} d\tau , \quad (2.64)$$

unde  $\mathbf{m}$  este momentul magnetic dipolar.

Potrivit relației (2.56), potențialul vector al câmpului unei distribuții continue de dipoli magnetici va fi atunci

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_o}{4\pi} \int_V d\mathbf{m} \times \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\tau'.$$

Utilizând relațiile (A.36) și (A.41), mai putem scrie :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= -\frac{\mu_o}{4\pi} \int_V \nabla' \times \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' + \frac{\mu_o}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' = \\ &= \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{n}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' + \frac{\mu_o}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau'. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Comparând (2.65) cu (2.38'), constatăm că cele două relații sunt formal identice, prin urmare putem lua

$$\mathbf{j}_m = \nabla \times \mathbf{M}; \quad \mathbf{i}_m = \mathbf{M} \times \mathbf{n}'. \quad (2.66)$$

Așadar, o distribuție continuă de dipoli magnetici se comportă, din punct de vedere al acțiunilor magnetice în exterior, ca și o distribuție fictivă de curenți, dispuși în volum și superficial. Aceștia sunt analogi sarcinilor legate din electrostatică și se datorează, așa cum vom vedea în capitolul următor, mișcării orbitale a electronilor în atomi.

Luând în considerație polarizarea magnetică a mediului, ecuația fundamentală a câmpului magnetic obținută în cazul vidului (2.39) va trebui modificată scriind

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_o} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_m = \mathbf{j} + \nabla \times \mathbf{M},$$

sau

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad (2.67)$$

unde

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_o} - \mathbf{M} \quad (2.68)$$

se numește *intensitatea câmpului magnetic* în mediul respectiv.

Menționăm că ecuația  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , în noile condiții, rămâne neschimbată. Ecuațiile  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}$  și  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  au stat, alături de (1.93), la baza teoriei câmpului *electromagnetic* a lui J.C.Maxwell.

## §2.9. Tipuri de medii magnetizabile

Utilizând relația de material  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$  și definiția (2.68), putem determina legătura dintre intensitatea de magnetizare  $\mathbf{M}$  și câmpul  $\mathbf{H}$ . În mediile omogene și izotrope relația de material este  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ , iar  $\mu = \mu_o \mu_r$ , deci

$$\mathbf{M} = (\mu_r - 1)\mathbf{H} = \chi \mathbf{H}, \quad (2.69)$$

unde mărimea

$$\chi = \mu_r - 1 \quad (2.70)$$

se numește *susceptibilitate magnetică* a mediului. De aici deducem următoarea relație dintre permeabilitatea mediului și cea a vidului

$$\mu = \mu_o(1 + \chi). \quad (2.71)$$

Substanțele caracterizate prin  $\chi < 0$  se numesc *diamagnetice*, iar cele cu  $\chi > 0$  se numesc *paramagnetice*.

În mediile izotrope neomogene, coeficienții  $\mu$  și  $\chi$  sunt funcții de punct :

$$\mathbf{M} = \chi(x, y, z)\mathbf{H}. \quad (2.72)$$

Unele medii prezintă o legătură neliniară între  $\mathbf{M}$  și  $\mathbf{H}$ , de forma

$$M = \chi_1 H + \chi_2 H^2 + \chi_3 H^3 + \dots, \quad (2.73)$$

cum este, de pildă, cazul substanțelor *feromagnetice*. În acest caz, coeficienții  $\chi$  și  $\mu$  nu mai sunt niște constante, ci depind de  $\mathbf{H}$ . Curba  $\mu = \mu(H)$  se determină experimental. La substanțele feromagnetice poate exista o polarizație magnetică  $\mathbf{M}_o \neq 0$  în absența câmpului exterior, adică

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_o + \chi \mathbf{H}. \quad (2.74)$$

În mediile anizotrope, relația dintre  $\mathbf{B}$  și  $\mathbf{H}$ , deci și cea dintre  $\mathbf{M}$  și  $\mathbf{H}$ , are un caracter tensorial:

$$B_i = \mu_{ik} H_k ; \quad M_i = [(\mu_r)_{ik} - \delta_{ik}] H_k = \chi_{ik} H_k, \quad (2.75)$$

unde  $\chi_{ik}$  este *tensorul susceptibilității magnetice* al mediului.

### &2.10. Ecuații de trecere pentru componentele de câmp $\mathbf{H}, \mathbf{B}$

Ecuațiile ce descriu comportarea componentelor normale și tangențiale ale câmpurilor  $\mathbf{H}, \mathbf{B}$  la trecerea prin pături ce separă medii cu permeabilități diferite se obțin printr-un procedeu cu totul similar celui utilizat în §1.12.

Fie două medii magnetizabile vecine, caracterizate prin permeabilitățile absolute  $\mu_1$  și  $\mu_2$ , separate printr-un strat de grosime  $dl$  în care există curenți electrici și fie  $\mathbf{H}_1, \mathbf{B}_1$ , respectiv  $\mathbf{H}_2, \mathbf{B}_2$  vectorii de câmp în cele două medii. Pentru a scrie ecuațiile de trecere ne vom servi de Fig.1.10, unde adaptarea la cazul de față este evidentă.

#### a) Ecuațiile de trecere pentru componentele normale

Fluxul câmpului  $\mathbf{B}$  prin suprafața prisme elementare ABCDEFGH este

$$d\Phi_m = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = d\Phi_1 + d\Phi_2 + d\Phi_l = (B_{2n} - B_{1n})dS' + d\Phi_l = 0.$$

Întrucât  $\lim_{dl \rightarrow 0} d\phi_l = 0$ , rezultă

$$B_{2n} - B_{1n} = 0 \quad (2.76)$$

și încă

$$\mu_2 H_{2n} - \mu_1 H_{1n} = 0, \quad (2.77)$$

prin urmare, la limita de separație dintre cele două medii, componenta normală a câmpului  $\mathbf{H}$ , pentru  $\mu_1 \neq \mu_2$ , suferă un salt, deci o *refracție*.

b) **Ecuatiile de trecere pentru componentele tangențiale**

Aplicând teorema lui Ampère (2.40) relativă la conturul ABCDA din Fig.1.10, avem :

$$\oint_{ABCD A} \mathbf{H}.d\mathbf{s} = \\ = \int_{AB} \mathbf{H}_1.ds_1 + \int_{BC} \mathbf{H}.ds + \int_{CD} \mathbf{H}_2.ds_2 + \int_{DA} \mathbf{H}.ds = \int_{dS} \mathbf{j}.d\mathbf{S}.$$

La limită, avem

$$\int (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{T} ds = \lim_{dl \rightarrow 0} \int_{dS} \mathbf{j}.d\mathbf{S} = \lim_{dl \rightarrow 0} \int_{dS} j_N dS = \int i_N ds,$$

căci curentul trebuie să rămână finit pentru  $dl \rightarrow 0$ . Aici am notat cu  $i_N$  componenta după direcția de versor  $\mathbf{N}$  a *densității liniare* de curent. Așadar, putem scrie :

$$H_{2T} - H_{1T} = i_N \quad \text{sau} \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{i} \quad (2.78)$$

și încă

$$\frac{B_{2T}}{\mu_2} - \frac{B_{1T}}{\mu_1} = i_N. \quad (2.79)$$

În concluzie, componenta tangențială a câmpului  $\mathbf{H}$  variază discontinuu (respectiv continuu, dacă  $i_N = 0$ ), iar cea a câmpului  $\mathbf{B}$  de asemenea, cu observația că  $B_{1T} = B_{2T}$  dacă  $\mu_1 = \mu_2, i_N = 0$ .

**PROBLEME**

1. O sferă nemagnetică omogenă de rază  $R$ , electrizată uniform în volum cu sarcina  $Q$ , se rotește uniform cu viteza unghiulară  $\omega$  în jurul unei axe ce trece prin centrul sferei. Să se determine momentul magnetic al sferei.

2. Să se calculeze potențialul vector și inducția create în vid de un curent rectiliniu de intensitate  $I$  și lungime  $2L$ .

3. O distribuție de curenți  $\mathbf{j}(x, y, z)$ , mărginită, produce în vid un câmp magnetic a cărui energie totală este  $W_o$ . Într-un mediu magnetizabil, neferomagnetic, aceeași distribuție produce un câmp a cărui energie totală este  $W$ . Să se arate că mediul contribuie la energie cu valoarea

$$\delta W = W - W_o = \frac{1}{2} \int \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_o \, d\tau,$$

unde  $\mathbf{M}$  este intensitatea de magnetizare a mediului, iar  $\mathbf{B}_o$  câmpul de inducție magnetică inițial (în vid).

4. Să se determine câmpul magnetic creat de un curent rectiliniu infinit, de intensitate  $I$ , aflat la distanța  $a$  de suprafața plană a unui bloc de fier cu permeabilitatea  $\mu$ .

5. Să se determine câmpul creat de un curent liniar de intensitate  $I$  într-un mediu magnetoanizotrop.

6. Să se găsească distribuția de curent, în regim staționar, într-o placă metalică dreptunghiulară, de grosime  $h$  și conductivitate  $\lambda$ . Electrozii prin care intră și iese curentul, de intensitate  $I$ , sunt aplicați în centrele a două laturi opuse ale plăcii.



## CAPITOLUL III

### CÂMPUL ELECTROMAGNETIC

#### §3.1. Ecuațiile lui Maxwell pentru vid

După cum se cunoaște de la orice curs general de "Electricitate și magnetism", studiul câmpurilor electric și magnetic variabile în timp a dus la concluzia că între cele două categorii de câmpuri există o strânsă interdependență, în sensul că un câmp electric variabil în timp dă naștere unui câmp magnetic și reciproc.

Plecând de la cercetările lui Ampère și Faraday, **James Clark Maxwell** elaborează o teorie ce are la bază conceptul de *câmp electromagnetic*. Așa cum rezultă din lucrarea sa fundamentală, intitulată "Tratat de electricitate și magnetism" și publicată în 1873, câmpurile electric și magnetic variabile în timp sunt interdependente și purtătoare de energie.

Principiile fundamentale ale teoriei electromagnetice a lui Maxwell sunt conținute într-un sistem de ecuații cu derivate parțiale, liniare, numite *ecuațiile lui Maxwell*. Două dintre aceste ecuații exprimă variația în timp a câmpurilor electric și magnetic. Acestea se obțin prin generalizarea, la cazul regimului nestaționar, a teoremei lui Ampère dedusă de noi în regim staționar, precum și prin generalizarea legii inducției electromagnetice a lui M. Faraday.

### Ecuatia Maxwell - Ampère

Din teorema lui Ampère sub formă diferențială (2.39)  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}$ , prin aplicarea divergenței și utilizarea lui (A.45), rezultă  $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ . Pe de altă parte, din ecuația de continuitate (2.15) avem  $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\partial\rho/\partial t$ . Prin urmare, dacă în regim staționar cele două ecuații coincid, în regim nestaționar ( $\partial\rho/\partial t \neq 0$ ) ele par să vină în contradicție. Această neconcordanță a fost soluționată în mod genial de Maxwell, prin introducerea noțiunii de *curent de deplasare*. Să urmărim, în continuare, raționamentul lui Maxwell.

Densitatea de curent  $\mathbf{j}$  care intervine în ecuația de continuitate este legată de mișcarea sarcinilor electrice și cuprinde, în general, un curent de conducție și unul de convecție. Spre deosebire de acesta, curenții de densitate  $\mathbf{j}$  care apar în teorema lui Ampère sunt definiți ca niște curenți închiși (fapt exprimat matematic prin ecuația  $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ ). De aceea, trebuie să presupunem că în teorema lui Ampère intervin și curenți de altă natură decât cei de conducție și convecție, care să închidă circuitul.

Maxwell admite valabilitatea teoremei lui Ampère și în regim nestaționar, cu observația că densitatea de curent  $\mathbf{j}$  se compune din două părți (termeni) :

$$\mathbf{j}_{total} = \mathbf{j}_{cond} + \mathbf{j}_{depl},$$

unde curenții de densitate  $\mathbf{j}_{depl}$  au fost denumiți *curenți de deplasare*. Teorema lui Ampère se va scrie atunci

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{cond} + \mathbf{j}_{depl}. \quad (3.1)$$

Aplicând acestei ecuații divergența, rezultă  $\nabla \cdot \mathbf{j}_{cond} + \nabla \cdot \mathbf{j}_{depl} = 0$ , adică

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_{depl} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_{cond} = \frac{\partial\rho}{\partial t},$$

sau, dacă utilizăm teorema lui Gauss sub formă diferențială (1.93),

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_{depl} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{D}) = \nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right),$$

căci operatorii  $\partial/\partial t$  și  $\nabla$  sunt independenți, deci permutabili. Din ultima relație deducem, ca cea mai simplă soluție

$$\mathbf{j}_{depl} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (3.2)$$

iar (3.1) devine

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (3.3)$$

numită *ecuația Maxwell-Ampère*. După cum se observă, am renunțat la indicele "cond" atașat densității de curent. Această convenție o vom utiliza și în cele ce urmează. În vid  $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_o$ ,  $\mathbf{D} = \epsilon_o \mathbf{E}$ , iar ecuația (3.3) capătă forma

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_o} = \mathbf{j} + \epsilon_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (3.4)$$

În concepția lui Maxwell, *curenții de deplasare există și în vid*. Ei sunt determinați nu de mișcarea sarcinilor electrice, ci de variația în timp a câmpului  $\mathbf{E}$ . Maxwell i-a denumit "curenți de deplasare" deoarece considera că variația în timp a câmpului  $\mathbf{E}$  produce în dielectric o variație a stării de deformare a eterului, modificare ce se propagă din aproape în aproape, prin deplasări mecanice.

Ecuația (3.4) exprimă, între altele, faptul extrem de important că *un câmp electric variabil în timp dă naștere unui câmp magnetic*.

### Ecuția Maxwell - Faraday

În anul 1831 M.Faraday descoperă fenomenul de *inducție electromagnetică*. Legea inducției electromagnetice, scrisă sub formă integrală (Neumann, 1845), este

$$\mathcal{E}_{ind} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d\Phi_m}{dt}, \quad (3.5)$$

unde  $\mathcal{E}_{ind}$  este tensiunea electromotoare de inducție,  $C$  este un contur închis prin care circulă curentul indus, iar  $\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$  este fluxul de inducție magnetică prin suprafața  $S$  ce se sprijină pe conturul  $C$ .

Semnul "minus" exprimă legea lui Lenz: *fluxul produs de curenul indus se opune variației fluxului inductor*. Se observă că în regim variabil  $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$ , prin urmare câmpul electric indus *nu este conservativ*.

Maxwell generalizează legea inducției (3.5), admitând că este universal valabilă, în sensul că aceasta rămâne adevărată și în cazul în care  $C$  este o curbă închisă oarecare (nu neapărat un conductor) într-un mediu sau chiar în vid.

Teoria dezvoltată în prezentul capitol (cu excepția ultimului paragraf) se bazează pe supoziția că mediul în care are loc fenomenul de inducție electromagnetică este în repaus față de observator. Aceasta se traduce matematic prin aceea că funcțiile de câmp  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  etc. nu depind explicit de coordonatele  $x, y, z$  ale punctului în care are loc fenomenul. Ținând seama de această mențiune, putem scrie

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S},$$

iar ecuația (3.5), cu ajutorul teoremei Stokes - Ampère (A.31) conduce la

$$\int_S \left( \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Cum  $S$  este arbitrar, avem în definitiv

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.6)$$

numită *ecuația Maxwell - Faraday*. Aceasta exprimă faptul că : *un câmp magnetic variabil în timp dă naștere unui câmp electric*, indiferent de faptul dacă în regiunea din spațiu unde se produce fenomenul există substanță sau nu.

În vid  $\mathbf{B} = \mu_o \mathbf{H}$  și ecuația (3.6) se scrie

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_o \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (3.7)$$

Ecuațiile (3.5) și (3.6) nu sunt suficiente pentru a descrie variația în spațiu a componentelor câmpurilor  $\mathbf{D}$  și  $\mathbf{B}$  ; la acestea trebuie adăugate

ecuațiile ce descriu caracterul câmpului respectiv (dacă este cu sau fără surse). În acest scop, Maxwell face apel la formele diferențiale ale teoremei lui Gauss pentru câmpurile în cauză (1.93) și (2.42).

Câmpul electromagnetic în vid este descris, așadar, de următorul sistem de ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi, liniare:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} ; & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} ; \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 ; & \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho,\end{aligned}\tag{3.8}$$

completate cu relațiile de material

$$\mathbf{D} = \epsilon_o \mathbf{E} ; \quad \mathbf{B} = \mu_o \mathbf{H}\tag{3.9}$$

și cu expresia energiei câmpului electromagnetic care, prin definiție, este

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) d\tau,\tag{3.10}$$

iar pentru vid

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_o \int_V E^2 d\tau + \frac{1}{2} \mu_o \int_V H^2 d\tau.\tag{3.11}$$

Expresiile (3.10) și (3.11) rezultă din generalizarea relațiilor ce definesc energia câmpului electrostatic (1.63) și magnetostatic (2.51).

Sistemul ecuațiilor lui Maxwell exprimă matematic principiile fundamentale ale teoriei câmpului electromagnetic. Ele pot fi grupate după următoarele două criterii :

a) Ecuațiile (3.8)<sub>1,2</sub> exprimă evoluția în timp a câmpurilor  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{B}$ , motiv pentru care se numesc *ecuații de evoluție*. Ecuațiile rămase (3.8)<sub>3,4</sub> poartă numele de *ecuații de condiție* (vezi §3.2).

b) Ecuațiile (3.8)<sub>1,4</sub> se numesc, din motive evidente, *ecuații cu surse*, iar cele rămase (3.8)<sub>2,3</sub> – *ecuații fără surse*.

Potrivit ecuațiilor lui Maxwell, câmpurile electrice și magnetice variabile în timp nu pot fi separate, ele formează o unitate denumită

de Maxwell *câmp electromagnetic*. În această ipostază, câmpurile electrostatic și magnetostatic apar drept cazuri particulare ale câmpului electromagnetic.

### §3.2. Ecuațiile lui Maxwell pentru medii polarizabile

Teoria lui Maxwell descrie corect fenomenele electromagnetice care au loc în vid. În medii materiale, însă, nu întotdeauna există concordanță între teorie și datele experimentale. Motivul trebuie căutat în faptul că teoria fenomenologică a lui Maxwell, dedusă prin generalizarea unor legi experimentale, nu ia în considerație structura discontinuă a substanței, în particular ignoră existența electronilor.

Descoperirea electronului în 1895 (deci *după* moartea lui Maxwell) de către J.J.Thomson duce la concluzii ce vin în contradicție cu concepția continuității sarcinii electrice, concepție ce stătea la baza teoriei lui Maxwell. Apare, astfel, necesitatea de a pune de acord structura atomică a substanței cu proprietățile sale electromagnetice. Problema este abordată de fizicianul olandez *Hendrik Antoon Lorentz*, în ultimul deceniu al secolului al XIX-lea.

Lorentz presupune că electronii, în calitate de particule încărcate electric, produc în jurul lor un câmp electromagnetic microscopic definit prin vectorii  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{b}$ , câmp legat de electroni. Câmpul *macroscopic*, definit prin mărimile vectoriale  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$ , rezultă din cel microscopic prin medierea în spațiu și timp a mărimilor microscopice, care intervin în ecuațiile ce descriu variația acestor mărimi.

Lorentz admite că interacțiunea dintre sarcinile microscopice și câmpurile microscopice se realizează prin intermediul vidului. El postulează *ecuațiile câmpului microscopic* ca fiind ecuațiile lui Maxwell pentru vid :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_o} \nabla \times \mathbf{b} &= \mathbf{j}_{micro} + \epsilon_o \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} ; & \nabla \times \mathbf{e} &= -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} ; \\ \nabla \cdot \mathbf{b} &= 0 ; & \epsilon_o \nabla \cdot \mathbf{e} &= \rho_{micro}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

unde am notat cu  $\mathbf{j}_{micro}$  și  $\rho_{micro}$  densitățile microscopice de curent, respectiv de sarcină electrică. Ecuațiile (3.12) se numesc *ecuațiile Maxwell - Lorentz*.

Câmpul electromagnetic microscopic variază foarte rapid pe distanțe mici (comparabile cu dimensiunea atomului, care este de aproximativ  $10^{-10}$  m). Instrumentele de măsură nu pot urmări aceste variații, ci ne furnizează doar valori medii ale mărimilor determinate, pe intervale temporale și spațiale mari față de cele microscopice, valori medii considerate ca macroscopice. În afară de aceasta, după cum știm, în substanță avem atât sarcini și curenți liberi ( $\rho_{lib}$ ,  $\mathbf{j}_{lib}$ ), cât și sarcini și curenți (circuite microscopice) legați ( $\rho_{leg}$ ,  $\mathbf{j}_{leg}$ ), care se pot transforma unele în altele, în funcție de intensitatea câmpului exterior.

În aceste condiții ne punem, firesc, întrebarea : pe ce domeniu spațial și pe ce durată trebuie efectuată medierea? Pentru a răspunde la întrebare, să considerăm o mărime microscopică  $\Psi(x, y, z, t)$ , aceasta putând fi oricare dintre mărimile  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\rho_{micro}$ ,  $\mathbf{j}_{micro}$ . Valoarea medie în spațiu și timp a acestei mărimi este, prin definiție

$$\begin{aligned} &< \Psi(x, y, z, t) > = \\ &= \frac{1}{\Delta V} \frac{1}{\Delta t} \int \Psi(x + \xi, y + \eta, z + \zeta, t + \theta) d\xi d\eta d\zeta d\theta, \end{aligned} \quad (3.13)$$

unde  $\Delta V$  este o vecinătate spațială a punctului  $P$ , de coordonate  $x, y, z$ , iar  $\Delta t$  o vecinătate temporală a momentului  $t$ , integrala cuadruplă (3.13) fiind extinsă pe domeniul  $\Delta V \Delta t$ . Vectorul  $\Delta \mathbf{r}$  ( $\xi, \eta, \zeta$ ) are originea în  $P$  și aparține vecinătății  $\Delta V$ , iar  $\theta$  aparține vecinătății  $\Delta t$ .

Pentru ca valoarea medie (3.13) să fie determinată în mod unic, ea nu trebuie să depindă de alegerea lui  $\Delta V$  și  $\Delta t$ , prin urmare în membrul drept din (3.13) înțelegem, de fapt, limita acestei expresii când produsul  $\Delta V \Delta t$  devine infinit mic (tinde la zero). Nu putem trece, însă, la limită în sensul obișnuit, matematic, al procedurii, deoarece la nivelul dimensiunilor subatomice am ajunge să avem zero particule în volumul  $\Delta V$ , ceea ce ar da o densitate  $\rho = 0$ . De aceea, Lorentz introduce noțiunea de *infinit mic fizic*, prin care înțelege un volum  $\Delta V$ , sau o durată  $\Delta t$ , sau o suprafață  $\Delta S$  etc., fiecare în parte satisfăcând simultan următoarele două condiții :

- 1) Este mare față de neomogenitățile, în spațiu și timp, ale mărimilor microscopice;
- 2) Este mic în raport cu neomogenitățile, în spațiu și timp, ale mărimilor macroscopice, sesizabile de aparatele de măsură.

De pildă, dacă  $10^{-4}m$  este sensibilitatea instrumentului de măsură, iar  $10^{-10}m$  este dimensiunea atomului, un element de linie de  $10^{-7}m$  este un infinit mic fizic. Așadar, dacă în (3.13) trecem la limită în sensul de mai sus, avem

$$\begin{aligned} & \langle \Psi(x, y, z, t) \rangle = \\ & = \frac{1}{V} \frac{1}{\tau} \int_D \int_{\theta=-\frac{\tau}{2}}^{\theta=+\frac{\tau}{2}} \Psi(x + \xi, y + \eta, z + \zeta, t + \theta) d\xi d\eta d\zeta d\theta, \end{aligned} \quad (3.14)$$

unde  $D$  este un domeniu tridimensional (spațial) infinit mic fizic, de volum  $V = \int d\xi d\eta d\zeta$ , iar  $\tau$  o durată infinit mică din punct de vedere fizic.

Prin *mărime macroscopică* vom înțelege valoarea medie a mărimii respective, luată pe un infinit mic fizic :  $\Psi_{macro} = \langle \Psi_{micro} \rangle$ . Se observă că operația de integrare în (3.14) este independentă de  $x, y, z, t$ , deci putem scrie

$$\nabla \langle \Psi \rangle = \langle \nabla \Psi \rangle ; \quad \frac{\partial}{\partial t} \langle \Psi \rangle = \langle \frac{\partial \Psi}{\partial t} \rangle \text{ etc.} \quad (3.15)$$

Să trecem acum la medierea, în sensul de mai sus, a ecuațiilor Maxwell - Lorentz (3.12). Prin definiție, vom lua  $\langle \mathbf{e} \rangle = \mathbf{E}$ ,  $\langle \mathbf{b} \rangle = \mathbf{B}$ , adică mediile câmpurilor microscopice  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{b}$  coincid cu valorile lor macroscopice  $\mathbf{E}$ , respectiv  $\mathbf{B}$ . Vom efectua medierea grupând, așa cum am văzut că este indicat uneori, ecuațiile (3.12) în ecuații cu surse și ecuații fără surse.

### Ecuatiile fără surse

Aplicând operația de mediere ecuațiilor  $\nabla \times \mathbf{e} = -\partial \mathbf{b} / \partial t$ ;  $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$  și utilizând proprietățile (3.15), avem :

$$\begin{aligned} & \langle \nabla \times \mathbf{e} \rangle = \nabla \times \langle \mathbf{e} \rangle = \nabla \times \mathbf{E}, \\ & \langle \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{b} \rangle = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \langle \nabla \cdot \mathbf{b} \rangle = \nabla \cdot \langle \mathbf{b} \rangle = \nabla \cdot \mathbf{B}, \end{aligned}$$

prin urmare găsim

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} ; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.16)$$



ecuații care ne sunt cunoscute.

### Ecuațiile cu surse

Pentru început, vom media ecuația  $\nabla \cdot (\epsilon_o \mathbf{e}) = \rho_{micro}$ . Avem :

$$\langle \nabla \cdot (\epsilon_o \mathbf{e}) \rangle = \nabla \cdot (\epsilon_o \mathbf{E}) = \langle \rho_{micro} \rangle . \quad (3.17)$$

În vederea medierii lui  $\rho_{micro}$  trebuie să ținem seama că acesta se compune din două părți:

a)  $\rho_{lib}$  - ce corespunde sarcinilor libere (electronii liberi din metale, ionii din gaze și soluții etc.);

b)  $\rho_{leg}$  - corespunzător sarcinilor legate, ce se deplasează infinitezimal sub acțiunea câmpului, formând dipoli (electronii în atomi, ionii în rețeaua cristalină și în moleculele neutre etc.). Prin urmare  $\rho_{micro} = \rho_{lib} + \rho_{leg}$ , deci

$$\langle \rho_{micro} \rangle = \langle \rho_{lib} \rangle + \langle \rho_{leg} \rangle . \quad (3.18)$$

Mărimea  $\langle \rho_{lib} \rangle$  este densitatea macroscopică de sarcină electrică  $\rho$ , adică acea parte din  $\langle \rho_{micro} \rangle$  ce este pusă în evidență de instrumentele de măsură :

$$\langle \rho_{lib} \rangle = \rho . \quad (3.19)$$

În ceea ce privește sarcinile legate, acestea se compun din dipoli elementari, formați (sau/și orientați) sub acțiunea câmpului electric. Momentul electric al unei distribuții continue de dipoli este, după cum știm (vezi 1.80):

$$\mathbf{p} = \int_V \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' d\tau' . \quad (3.20)$$

Densitatea  $\rho(\mathbf{r}')$  care intervine în ultima relație este o densitate macroscopică și apare ca urmare a formării dipolilor, prin urmare putem scrie

$$\mathbf{p} = \int_V \langle \rho_{leg} \rangle \mathbf{r}' d\tau' . \quad (3.21)$$

Pe de altă parte, definiția (1.85) a intensității de polarizare electrică  $\mathbf{P}$  ne permite să scriem

$$p_i = \int_V P_i(\mathbf{r}') d\tau' = \int_V P_k \delta_{ik} d\tau' = \int_V P \frac{\partial x'_i}{\partial x'_k} d\tau' =$$

$$= \int_V \frac{\partial}{\partial x'_k} (P_k x'_i) d\tau' - \int_V x'_i \nabla' \cdot \mathbf{P} d\tau'.$$

Aplicând primei integrale din membrul drept teorema Green-Gauss-Ostrogradski și extinzând domeniul de integrare asupra întregului spațiu, avem

$$\int \frac{\partial}{\partial x'_k} (P_k x'_i) d\tau' = \oint P_k x'_i dS'_k = 0,$$

căci la infinit nu există surse. Prin urmare

$$\mathbf{p} = - \int \mathbf{r}' \nabla' \cdot \mathbf{P} d\tau'. \quad (3.22)$$

Din (3.21) și (3.22) obținem

$$\int (< \rho_{leg} > + \nabla \cdot \mathbf{P}) \mathbf{r}' d\tau' = 0,$$

sau, dacă avem în vedere că forma și dimensiunile corpului sunt arbitrare,

$$< \rho_{leg} > = - \operatorname{div} \mathbf{P}, \quad (3.23)$$

rezultat deja cunoscut (vezi 1.89). Înlocuind (3.19) și (3.23) în (3.18) și apoi în (3.17), găsim

$$\nabla \cdot (\epsilon_o \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho,$$

de unde obținem ecuația căutată (și, de fapt, așteptată)

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (3.24)$$

în care am notat

$$\epsilon_o \mathbf{E} + \mathbf{P} = \mathbf{D}. \quad (3.25)$$

Câmpul vectorial  $\mathbf{D}$  se numește, după cum știm, *inducție electrică* sau *deplasare electrică*. În vid  $\mathbf{P} = 0$ , deci  $\mathbf{D} = \epsilon_o \mathbf{E}$ .

Inducția electrică este legată, așadar, de contribuția dipolilor elementari din dielectric : sub acțiunea câmpului exterior există un  $\mathbf{P} \neq 0$ ,

deci și o densitate de sarcină legată diferită de zero, a cărei valoare este dată de (3.23).

Să mediem, în continuare, ecuația Maxwell - Ampère (3.12)<sub>1</sub>.  
Avem:

$$\langle \frac{1}{\mu_o} \nabla \times \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{j}_{micro} \rangle + \langle \epsilon_o \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} \rangle$$

sau, în virtutea proprietăților (3.13),

$$\frac{1}{\mu_o} \nabla \times \mathbf{B} = \langle \mathbf{j}_{micro} \rangle + \epsilon_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (3.26)$$

Întocmai ca și densitatea de sarcină electrică microscopică,  $\mathbf{j}_{micro}$  se compune din două părți :  $\mathbf{j}_{micro} = \mathbf{j}_{lib} + \mathbf{j}_{leg}$ , unde :

a)  $\mathbf{j}_{lib}$  corespunde mișcării sarcinilor libere (electronii liberi în metale, ionii în electroliți sau gaze etc.);

b)  $\mathbf{j}_{leg}$  corespunde mișcării sarcinilor legate. Acesta, la rândul său, se compune din două părți (termeni) :  $\mathbf{j}_{leg} = \mathbf{j}_{mol} + \mathbf{j}_{pol}$ , unde

i)  $\mathbf{j}_{mol}$  este densitatea curenților microscopici moleculari, datorăți mișcării orbitale a electronilor;

ii)  $\mathbf{j}_{pol}$  reprezintă densitatea curenților microscopici de polarizare, datorăți deplasării relative a polilor în dipoli, cu alte cuvinte polarizării moleculelor.

Vom avea, așadar, prin mediere

$$\langle \mathbf{j}_{micro} \rangle = \langle \mathbf{j}_{lib} \rangle + \langle \mathbf{j}_{mol} \rangle + \langle \mathbf{j}_{pol} \rangle. \quad (3.27)$$

Mărimea  $\langle \mathbf{j}_{lib} \rangle$  este densitatea  $\mathbf{j}$  a curentului macroscopic, pus în evidență de instrumentele de măsură :

$$\langle \mathbf{j}_{lib} \rangle = \langle \rho \mathbf{v}_{lib} \rangle = \mathbf{j}, \quad (3.28)$$

unde  $\mathbf{v}_{lib}$  este viteza sarcinilor libere în raport cu un observator fix. În general,  $\mathbf{j}$  se compune dintr-un curent de conducție și unul de convecție:  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_{cond} + \mathbf{j}_{conv}$ . În metale  $\mathbf{j}_{conv} = 0$ , deci  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_{cond}$ .

Densitate de curent  $\mathbf{j}_{mol}$  se datorează mișcării orbitale a electronilor, deci faptului că electronii se manifestă ca niște magneti elementari

(foițe magnetice). Având în vedere (2.55), momentul magnetic dipolar al unei distribuții continue de astfel de dipoli va fi atunci

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r}' \times \langle \mathbf{j}_{mol}(\mathbf{r}') \rangle d\tau'. \quad (3.29)$$

Pe de altă parte, din definiția intensității de magnetizare  $\mathbf{M}$  (2.64), rezultă

$$\mathbf{m} = \int_V \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}') d\tau'. \quad (3.30)$$

Pentru a putea compara ultimele două relații, vom scrie (vezi A.43):

$$\nabla'(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{M}) = \mathbf{r}' \times (\nabla \times \mathbf{M}) + (\mathbf{r}' \cdot \nabla')\mathbf{M} + (\mathbf{M} \cdot \nabla')\mathbf{r}',$$

unde am avut în vedere că  $\nabla' \times \mathbf{r}' = 0$ . Ultimul termen din relația precedentă se mai scrie

$$(\mathbf{M} \cdot \nabla')\mathbf{r}' = M'_i \frac{\partial}{\partial x'_i} (x'_k \mathbf{u}'_k) = M'_i \delta_{ik} \mathbf{u}'_k = M'_i \mathbf{u}'_i = \mathbf{M},$$

deci

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}') d\tau' &= \int_V \nabla'(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{M}) d\tau' - \\ &- \int_V \mathbf{r}' \times (\nabla' \times \mathbf{M}) d\tau' - \int_V (\mathbf{r}' \cdot \nabla')\mathbf{M} d\tau'. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Apelând la formula (A.34) și extinzând domeniul de integrare asupra întregului spațiu, constatăm că prima integrală din membrul drept al relației (3.31) se anulează

$$\int_V \nabla'(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{M}) d\tau' = \oint (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{M}) d\mathbf{S}' = 0,$$

căci la infinit nu avem sarcini sau curenți, deci nici fenomene de polarizare magnetică.

Pentru a calcula ultima integrală din (3.31), este convenabil să luăm componenta acesteia după direcția  $x_i$ . Avem :

$$- \int x'_k \frac{\partial M_i}{\partial x'_k} d\tau' = - \int \frac{\partial}{\partial x'_k} (x'_k M_i) d\tau' + \int M_i \frac{\partial x'_k}{\partial x'_k} d\tau' =$$

$$= - \oint x'_k M_i dS'_k + 3 \int M_i d\tau' = 3 \int M_i d\tau',$$

căci integrala de suprafață se anulează din motivul precizat mai sus. Relația (3.31) conduce atunci la

$$\mathbf{m} = \int \mathbf{M} d\tau' = \frac{1}{2} \int \mathbf{r}' \times (\nabla' \times \mathbf{M}) d\tau'. \quad (3.32)$$

Comparând relațiile (3.29) și (3.32), găsim în sfârșit

$$\langle \mathbf{j}_{mol} \rangle = \text{rot } \mathbf{M}. \quad (3.33)$$

Ultimul termen al relației (3.27) este  $\langle \mathbf{j}_{pol} \rangle$ . Deoarece  $\mathbf{j}_{pol}$  se datorează variației în timp a distanței  $l$  dintre sarcinile dipolului, putem scrie

$$\langle \mathbf{j}_{pol} \rangle = N e \langle \dot{\mathbf{l}} \rangle = \frac{\partial}{\partial t} (N e \mathbf{l}) = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad (3.34)$$

căci

$$N e \mathbf{l} = \frac{n \mathbf{P}}{V} = \mathbf{P}.$$

Așadar, putem scrie

$$\langle \mathbf{j}_{leg} \rangle = \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (3.35)$$

Este interesant de remarcat faptul că această ultimă relație rezultă ca o consecință imediată a medierii ecuației de continuitate pentru sarcinile legate. Într-adevăr:

$$\text{div } \langle \mathbf{j}_{leg} \rangle = - \frac{\partial}{\partial t} \langle \rho_{leg} \rangle = \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \mathbf{P}) = \text{div } \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t},$$

de unde rezultă (3.35).

Înlocuind (3.28) și (3.35) în (3.27), obținem

$$\langle \mathbf{j}_{micro} \rangle = \mathbf{j} + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad (3.36)$$

iar ecuația (3.26) se scrie

$$\nabla \times \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_o} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_o \mathbf{E} + \mathbf{P}). \quad (3.37)$$

Dacă notăm

$$\frac{\mathbf{B}}{\mu_o} - \mathbf{M} = \mathbf{H}; \quad \epsilon_o \mathbf{E} + \mathbf{P} = \mathbf{D}, \quad (3.38)$$

avem în definitiv, după cum era de așteptat,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (3.39)$$

### Observații

a) Vom continua să numim ecuațiile deduse în acest paragraf *ecuațiile lui Maxwell*, fără ca prin aceasta să ignorăm contribuția adusă de Lorentz la explicarea semnificației mărimilor de câmp în cazul mediilor polarizabile.

b) Reamintim că studiul nostru, pe parcursul celor două volume, se limitează la studiul fenomenelor electromagnetice în medii liniare.

c) Aplicând divergența ecuației fără surse (3.16)<sub>1</sub>, avem :

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0.$$

Prin urmare, ecuațiile fără surse nu sunt complet independente între ele, ecuația  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  apărând în ipostaza de condiție inițială pentru ecuația  $\nabla \times \mathbf{E} = - \partial \mathbf{B} / \partial t$ .

În mod similar, dacă aplicăm divergența ecuației cu surse (3.39), obținem

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = - \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{D}) = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{D} - \rho) = 0.$$

Așadar, nici ecuațiile cu surse nu sunt cu totul independente între ele, ecuația  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$  constituind o condiție inițială pentru ecuația  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t$ .

Aceste considerații ne determină să numim ecuațiile lui Maxwell  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  și  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$  *ecuații de condiție*.

d) Întrucât, potrivit celor de mai sus, dintre ecuațiile lui Maxwell strict independente sunt doar cele de evoluție (șase ecuații scalare), iar numărul necunoscutelor ce apar în aceste ecuații este de 16 ( $E_i, D_i, H_i, B_i, j_i, \rho, i = 1, 2, 3$ ), sistemul trebuie completat cu încă 10 ecuații. Nouă dintre acestea sunt *relațiile de material*, numite și *ecuații constitutive*

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}) ; \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}) ; \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{E}).$$

În mediile liniare, omogene și izotrope, ecuațiile constitutive au forma cunoscută :

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} , \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} , \quad \mathbf{j} = \lambda(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{ext}).$$

Cea de a zecea ecuație, ce completează sistemul de 16 ecuații cu derivate parțiale, liniare, cu 16 mărimi necunoscute, este ecuația de continuitate.

Pentru a lega mărimile de câmp de cele mecanice, se postulează expresia energiei electromagnetice (3.10).

Ecuațiile lui Maxwell, completate cu ecuațiile constitutive, ecuația de continuitate și expresia energiei câmpului electromagnetic reprezintă, în lipsa suprafețelor de discontinuitate (deci, în medii considerate infinite), axiomele electrodinamicii fenomenologice maxwelliene.

### §3.3. Ecuații de trecere

Precizăm, de la bun început, că ecuațiile de trecere (1.100), (1.102), (2.76) și (2.78), deduse de noi separat pentru câmpul electrostatic și cel magnetostatic, rămân valabile fără nici o modificare în regim variabil. să le transcriem, indicând totodată legea fundamentală din care le-am dedus:

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \quad \rightarrow \quad D_{2n} - D_{1n} = \sigma ;$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad \rightarrow \quad E_{2T} - E_{1T} = 0 ;$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \rightarrow \quad B_{2n} - B_{1n} = 0 ;$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad \rightarrow \quad H_{2T} - H_{1T} = i_N. \quad (3.40)$$

Pentru a justifica afirmația de mai sus, observăm, înainte de toate, că ecuațiile (3.40)<sub>1</sub> și (3.40)<sub>3</sub> au fost obținute din teorema lui Gauss relativă la câmpul  $\mathbf{D}$ , respectiv câmpul  $\mathbf{B}$ , care nu se modifică în regim variabil.

În vederea stabilirii ecuației (3.40)<sub>2</sub>, să integrăm ecuația lui Maxwell (3.16)<sub>1</sub> pe o suprafață fixă  $S$  ce se sprijină pe conturul  $C$ . Avem :

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

Făcând apel la Fig.1.9, se calculează circulația pe conturul ABCDA printr-un procedeu absolut analog celui din §1.12. La limita  $dl \rightarrow 0$  suprafața  $dS$  pe care se calculează fluxul câmpului  $\mathbf{B}$  tinde la zero, prin urmare  $\int_{dS} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \rightarrow 0$ . Rezultă atunci ecuația (3.40)<sub>2</sub>.

În fine, pentru a justifica ecuația (3.40)<sub>4</sub>, să integrăm ecuația lui Maxwell (3.39) pe suprafața fixă  $S$  definită mai sus. Avem:

$$\int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}.$$

Luând și de data aceasta ABCDA drept contur de integrare și observând că  $\lim_{dl \rightarrow 0} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$ , deducem ecuația de trecere (3.40)<sub>4</sub>.

Să scriem încă o dată ecuațiile de trecere, inserând și ecuațiile lui Maxwell cărora acestea le corespund:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho & \rightarrow D_{2n} - D_{1n} &= \sigma ; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \rightarrow E_{2T} - E_{1T} &= 0 ; \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 & \rightarrow B_{2n} - B_{1n} &= 0 ; \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} & \rightarrow H_{2T} - H_{1T} &= i_N. \end{aligned} \quad (3.40')$$



Aceste ecuații se aplică ori de câte ori mărimile de câmp  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$  suferă refracției la trecerea prin pături ce separă medii cu constante de material  $\epsilon$ ,  $\mu$  și  $\lambda$  diferite. Prin urmare, în cazul existenței unor astfel de suprafețe de discontinuitate pentru mărimile de câmp, ecuațiile lui Maxwell trebuie completate cu ecuațiile de trecere (3.40).

### §3.4. Energia câmpului electromagnetic. Teorema lui Poynting

După cum am menționat în §3.1, energia câmpului electromagnetic se postulează a fi

$$W_{em} = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) d\tau, \quad (3.41)$$

unde integrarea se efectuează pe un domeniu spațial de volum  $V$ , mărginit de suprafața  $S$ .

Ne propunem să evaluăm variația în timp a energiei  $W_{em}$ . În acest scop, vom deriva total în raport cu timpul relația (3.41). Avem :

$$\frac{dW_{em}}{dt} = \frac{1}{2} \int_V \frac{\partial}{\partial t} ((\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B})) d\tau.$$

Admițând că mediul este liniar, omogen și izotrop, ecuațiile constitutive vor fi

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \lambda (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{ext}). \quad (3.42)$$

Mai putem scrie atunci

$$\begin{aligned} \frac{dW_{em}}{dt} &= \frac{1}{2} \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon E^2 + \mu H^2) d\tau = \int_V (\epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}) d\tau = \\ &= \int_V (\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}) d\tau. \end{aligned}$$

Utilizând ecuațiile de evoluție ale lui Maxwell  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t$ ,  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ , mai avem

$$\frac{dW_{em}}{dt} = \int_V (\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E}) d\tau - \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d\tau =$$

$$= - \int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d\tau - \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d\tau,$$

sau, dacă facem apel la teorema Green-Gauss-Ostrogradski

$$\frac{dW_{em}}{dt} = - \oint (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} - \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d\tau. \quad (3.43)$$

Dacă notăm

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (\text{vectorul lui Poynting}) \quad (3.44)$$

și utilizăm (3.42)<sub>3</sub>, obținem în definitiv

$$\frac{dW_{em}}{dt} = - \oint_S \mathbf{\Pi} \cdot d\mathbf{S} - \int_V \frac{j^2}{\lambda} d\tau + \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^{ext} d\tau. \quad (3.45)$$

Această relație exprimă legea transformării și conservării energiei în procesele electromagnetice și este cunoscută sub numele de *teorema lui Poynting*. Primul termen din membrul drept este fluxul energiei electromagnetice care trece în unitatea de timp prin suprafața  $S$ , prin urmare vectorul lui Poynting are semnificația *fluxului radiant, în unitatea de timp și unitatea de suprafață*, normală la  $\mathbf{\Pi}$ . Altfel spus, componenta  $\Pi_n$  a vectorului lui Poynting reprezintă *densitatea puterii disipate prin efect de radiație electromagnetică*.

Cel de al doilea termen din (3.34) reprezintă căldura Joule degajată de curenții de conducție în volumul  $V$ , în unitatea de timp. În fine, al treilea termen reprezintă lucrul mecanic efectuat, în unitatea de timp, de tensiunile electromotoare exterioare asupra curenților de conducție.

Teorema lui Poynting se poate formula, așadar, în felul următor : *energia electromagnetică este disipată sub formă de radiație electromagnetică și căldură Joule, recuperându-se pe seama unor surse exterioare (dacă acestea există).*

Observând că

$$\frac{dW_{mec}}{dt} = \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d\tau$$

este lucrul mecanic efectuat în unitatea de timp de câmpul  $\mathbf{E}$  asupra curenților  $\mathbf{j}$ , mai putem scrie teorema lui Poynting (pentru  $\mathbf{E}^{ext} = 0$ ) sub forma

$$\frac{d}{dt}(W_{em} + W_{mec}) = - \oint \mathbf{\Pi} \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.46)$$

Dacă sistemul este închis (nu există radiație electromagnetică), din (3.46) deducem că se conservă suma  $W = W_{mec} + W_{em}$ .

Definind *densitatea de energie electromagnetică* prin

$$w_{em} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}), \quad (3.47)$$

din (3.43) deducem

$$\frac{\partial w_{em}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{\Pi} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}.$$

Pentru  $\lambda = 0$ , avem  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = 0$ , iar ultima ecuație se reduce la

$$\frac{\partial w_{em}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{\Pi} = 0, \quad (3.48)$$

asemănătoare *ecuației de continuitate*

**Observație.** Menționăm faptul că există mecanisme de disipare a energiei electromagnetice pe care nu le-am luat în considerație. De pildă, în cazul substanțelor feromagnetice, trebuie să se țină seama de energia pierdută prin histerezis.

### Aplicație. Unicitatea soluțiilor ecuațiilor lui Maxwell

Utilizând teorema lui Poynting, să arătăm că ecuațiile lui Maxwell, completate cu ecuațiile constitutive, ecuațiile de trecere și expresia energiei electromagnetice, determină câmpul electromagnetic în mod unic. În acest sens, vom demonstra următoarea teoremă:

**Teoremă.** Dacă la momentul inițial  $t = 0$  sunt date  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, 0)$ ,  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, 0)$  în fiecare punct al unui domeniu spațial  $D$ , de volum  $V$ , mărginit de suprafața  $S$ , iar pe frontiera  $S$  se dă valoarea componentei tangențiale

$$E_T(\mathbf{r}, t) \quad \text{sau} \quad H_T(\mathbf{r}, t) \quad \text{pentru } 0 \leq t \leq t_1,$$

atunci sistemul ecuațiilor lui Maxwell determină câmpul în mod unic, la orice moment  $t_1 > 0$ .

Demonstrația teoremei se bazează pe metoda reducerii la absurd.  
Fie

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 ; \quad \mathbf{H}' = \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2.$$

Liniaritatea ecuațiilor lui Maxwell implică proprietatea de suprapunere a câmpurilor electromagnetice, prin urmare câmpul  $(\mathbf{E}', \mathbf{H}')$  va fi, de asemenea, o soluție a ecuațiilor lui Maxwell, satisfăcând condițiile inițiale și condițiile la limită, adică :

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, 0) - \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, 0) ;$$

$$\mathbf{H}'(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{H}_1(\mathbf{r}, 0) - \mathbf{H}_2(\mathbf{r}, 0) ;$$

$$E'_T(\mathbf{r}, 0) = 0 \quad \text{sau} \quad H'_T(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \text{pentru } 0 \leq t \leq t_1.$$

Observăm că

$$W'_{em} = \frac{1}{2} \int (\epsilon E'^2 + \mu H'^2) d\tau \geq 0 \quad \text{și} \quad W'_{em} = 0 \text{ la } t = 0 ;$$

$$P'_{rad} = \oint (\mathbf{E}' \times \mathbf{H}') \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad \text{căci} \quad (\mathbf{E}' \times \mathbf{H}') \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{n} \times \mathbf{E}') \cdot \mathbf{H}' = 0 ;$$

$$P'_{Joule} = \int_V \frac{j^2}{\lambda} d\tau \geq 0 ;$$

$$P'_{ext} = \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^{ext} d\tau = 0, \quad \text{căci} \quad \mathbf{E}_1^{ext} = \mathbf{E}_2^{ext}, \text{ deci } \mathbf{E}'^{ext} = \mathbf{E}_1^{ext} - \mathbf{E}_2^{ext} = 0$$

Aplicând teorema lui Poynting (3.45), rezultă

$$\frac{dW'_{em}}{dt} = -P'_{Joule} \leq 0.$$

Din cele de mai sus deducem că energia electromagnetică este o funcție care la momentul  $t = 0$  este nulă, este monoton descrescătoare și este totodată pozitivă. Aceasta este posibil dacă și numai dacă  $W'_{em} \equiv 0$ , adică dacă în întregul interval temporal  $(0, t_1)$  avem  $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2$ ,  $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2$ . Prin aceasta, teorema este demonstrată.

### §3.5. Impulsul câmpului electromagnetic. Teorema impulsului

Forța electromagnetică cu care câmpul  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  acționează asupra unei sarcini electrice  $q$  ce se deplasează în câmp este  $\mathbf{F}_{em} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ . Dacă sarcina electrică  $q$  este distribuită în mod continuu într-un volum  $V$  cu densitatea spațială  $\rho$ , atunci densitatea forței electromagnetice va fi  $\mathbf{f}_{em} = \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ , iar ecuația de mișcare a sarcinii în câmpul  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  se va scrie

$$\mathbf{F}_{mec} = \frac{d\mathbf{P}_{mec}}{dt} = \int_V (\rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}) d\tau. \quad (3.49)$$

Utilizând ecuațiile lui Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho; \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

vom elimina sursele  $\rho$  și  $\mathbf{j}$  din (3.49). Avem:

$$\begin{aligned} \rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} &= \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{D} + (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B} = \\ &= \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{D} - \mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{H}) - \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D} \times \mathbf{B}). \end{aligned}$$

Adăugând în membrul drept termenul nul  $\mathbf{H} \nabla \cdot \mathbf{B}$  și integrând pe domeniul mărginit și fix de volum  $V$ , rezultă

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{P}_{mec} + \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{D} \times \mathbf{B} d\tau = \\ = \int_V [\mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{D} - \mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \mathbf{H} \nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{H})] d\tau. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Se observă că integrala din membrul stâng are dimensiunea unui impuls. Îl vom nota cu  $\mathbf{P}_{em}$  și-l vom numi *impulsul câmpului electromagnetic* sau, mai scurt, *impulsul electromagnetic*

$$\mathbf{P}_{em} = \int_V \mathbf{D} \times \mathbf{B} d\tau. \quad (3.51)$$

Densitatea acestui impuls este  $\mathbf{p}_{em} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$ . În vid

$$\mathbf{p}_{em} = \epsilon_o \mu_o \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \mathbf{\Pi}, \quad (3.52)$$

unde  $\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  este vectorul lui Poynting (3.44).

Pentru a explicita membrul drept al relației (3.50), să calculăm componenta acestuia după direcția  $x_i$ . Din primii doi termeni obținem:

$$\begin{aligned} & \epsilon \left( E_i \frac{\partial E_k}{\partial x_k} - \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} E_j \frac{\partial E_m}{\partial x_l} \right) = \\ & = \epsilon \left[ E_i \frac{\partial E_k}{\partial x_k} - (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) E_j \frac{\partial E_m}{\partial x_l} \right] = \\ & \epsilon \left[ E_i \frac{\partial E_k}{\partial x_k} + E_l \frac{\partial E_i}{\partial x_l} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (E_m E_m) \right] = \\ & = \frac{\partial}{\partial x_k} (E_i D_k - \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \delta_{ik}). \end{aligned}$$

Cantitatea din paranteză este un tensor simetric de ordinul al doilea, pe care-l recunoaștem ca fiind *tensorul tensiunilor electrice al lui Maxwell*, definit de noi în Cap.I pentru cazul mai general al variației permitivității electrice cu densitatea mediului. Notând, așadar

$$T_{ik}^{(e)} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \delta_{ik} - E_i D_k, \quad (3.53)$$

avem

$$[\mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{D} - \mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{E})]_i = - \frac{\partial}{\partial x_k} T_{ik}^{(e)}.$$

În mod cu totul asemănător găsim

$$[\mathbf{H} \nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{H})]_i = - \frac{\partial}{\partial x_k} T_{ik}^{(m)},$$

unde

$$T_{ik}^{(m)} = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \delta_{ik} - H_i H_k, \quad (3.54)$$

Componenta după  $x_i$  a ecuației vectoriale (3.50) va fi așadar

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{P}_{mec} + \mathbf{P}_{em})_i = - \int_V \frac{\partial}{\partial x_k} (T_{ik}) d\tau = - \oint_S T_{ik} dS_k, \quad (3.55)$$

unde tensorul simetric

$$T_{ik} = T_{ik}^{(e)} + T_{ik}^{(m)} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B})\delta_{ik} - E_i D_k - H_i B_k \quad (3.56)$$

este, precum știm, *tensorul tensiunilor electrice și magnetice al lui Maxwell*. Denumirea dată de Maxwell acestui tensor are următoarea explicație : Maxwell concepea eterul ca pe un corp cu proprietăți de mediu absolut elastic. El considera că acțiunea câmpului deformează eterul, iar dispariția câmpului face ca eterul să-și reia forma inițială. Teoria lui Maxwell asupra eterului realizează o analogie cu corpurile elastice: așa cum acestea din urmă sunt caracterizate printr-un sistem de 9 mărimi, care alcătuiesc tensorul tensiunilor elastice, tot așa existența forțelor electrice (magnetice) conduce la apariția unor tensiuni mecanice care deformează eterul, acțiuni caracterizate prin tensorul  $T_{ik}$  definit de (3.56).

Sub formă vectorială, ecuația (3.55) se scrie

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{P}_{mec} + \mathbf{P}_{em}) = - \oint_S \mathcal{T} \cdot d\mathbf{S} = - \oint_S \mathcal{T} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (3.57)$$

unde am utilizat pentru tensorul  $T_{ik}$  forma diadică. Prin urmare, tensorul tensiunilor al lui Maxwell reprezintă *densitatea fluxului de impuls* al câmpului electromagnetic. Cu alte cuvinte, *fluxul de energie electromagnetică, de densitate  $\mathbf{\Pi}$  este însoțit de un flux de impuls electromagnetic, de densitate  $\mathcal{T}$* .

Dacă suprafața pe care se efectuează integrarea în (3.55) se află la infinit, sau dacă pe  $S$  avem  $\mathbf{E} = 0$  sau  $\mathbf{H} = 0$ , impulsul se conservă :

$$\mathbf{P}_{mec} + \mathbf{P}_{em} = \text{const.}$$

Considerațiile de mai sus conduc, așadar, la concluzia că ecuația (3.57) exprimă legea transformării și conservării impulsului în procesele electromagnetice.

### §3.6. Momentul cinetic al câmpului electromagnetic. Teorema momentului cinetic

Amintindu-ne că tensorul lui Maxwell este simetric și având în vedere relațiile (3.49), (3.51) și (3.55), vom scrie bilanțul forțelor din unitatea de volum a domeniului spațial fix  $D$  sub forma

$$\mathbf{f} + \frac{\partial \mathbf{p}_{em}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{T}_l}{\partial x_l}. \quad (3.58)$$

Înmulțind vectorial această relație cu vectorul de poziție  $\mathbf{r}$ , considerat în raport cu originea coordonatelor și apoi integrând pe domeniul  $D$ , rezultă

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{f} \, d\tau + \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{p}_{em} \, d\tau = \\ = - \int_V \frac{\partial}{\partial x_l} (\mathbf{r} \times \mathbf{T}_l) \, d\tau = - \oint_S \mathbf{r} \times \mathbf{T}_l \, dS_l, \end{aligned} \quad (3.59)$$

unde am ținut seama că  $\mathbf{r}$ , fiind vectorul de poziție al unui punct din  $D$ , nu depinde explicit de timp, iar

$$\mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{T}_l}{\partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_l} (\mathbf{r} \times \mathbf{T}_l) - \mathbf{u}_l \times \mathbf{T}_l = \frac{\partial}{\partial x_l} (\mathbf{r} \times \mathbf{T}_l),$$

căci vectorii  $\mathbf{u}_l$  și  $\mathbf{T}_l$  au aceeași direcție.

Prima integrală din membrul stâng al relației (3.59) reprezintă momentul forței electromagnetice. Acesta, potrivit teoremei momentului cinetic, va fi egal cu derivata totală în raport cu timpul a momentului cinetic mecanic  $\mathbf{L}_{mec}$ . Integrala ce intervine în cel de al doilea termen constituie momentul cinetic al câmpului electromagnetic  $\mathbf{L}_{em}$ . Mai putem scrie așadar

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{L}_{mec} + \mathbf{L}_{em}) = - \oint_S \mathbf{r} \times \mathbf{T}_l \, dS_l, \quad (3.60)$$

sau, în proiecție pe direcția  $x_i$ ,

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{L}_{mec} + \mathbf{L}_{em})_i = - \oint_S L_{il} \, dS_l, \quad (3.60')$$



unde

$$L_{il} = \varepsilon_{ijk} x_j T_{lk} = \varepsilon_{ijk} x_j T_{kl} \quad (3.61)$$

este un tensor ce semnifică *densitatea fluxului de moment cinetic* al câmpului electromagnetic.

Dacă suprafața pe care se efectuează integrarea în (3.60') este situată la infinit, sau dacă  $\mathbf{E}|_S = 0$ ,  $\mathbf{H}|_S = 0$ , din (3.60') rezultă

$$\mathbf{L}_{mec} + \mathbf{L}_{em} = const.$$

În concluzie, ecuația (3.60) exprimă legea *transformării și conservării momentului cinetic* în procesele electromagnetice.

### §3.7. Potențiale electrodinamice

Pentru a cunoaște câmpul electromagnetic într-un punct din spațiul vid sau al unui mediu omogen și izotrop, ale cărui constante de material sunt cunoscute, este necesar să cunoaștem valorile a șase mărimi scalare: componentele câmpurilor vectoriale  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{B}$ .

Problema determinării câmpului se simplifică dacă apelăm la exprimarea acestuia cu ajutorul potențialelor. După cum știm, în regim staționar, câmpurile  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{B}$  se pot scrie în funcție de potențialul electrostatic  $\mathcal{V}$ , respectiv potențialul vector  $\mathbf{A}$  definit pentru câmpul curenților staționari. Cum, însă, în regim variabil există o strânsă interdependență între cele două categorii de câmpuri, acest fapt se va reflecta și asupra relației dintre câmp și potențiale.

Pentru a stabili relațiile dintre câmpul electromagnetic  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ , pe de o parte, și potențialele acestuia  $\mathbf{A}$ ,  $\mathcal{V}$ , pe de alta, vom utiliza ecuațiile lui Maxwell fără surse (pe care le transcriem, pentru a facilita urmărirea calculelor):

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 ; \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (3.62)$$

Din prima ecuație rezultă, după cum știm,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (3.63)$$

care, introdusă în (3.62)<sub>2</sub>, ne dă

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla \times \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right); \quad \nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0,$$

sau, dacă ne amintim că rotorul unui gradient este zero,

$$\mathbf{E} = -\nabla \mathcal{V} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (3.64)$$

Funcțiile  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathcal{V}(\mathbf{r}, t)$ , presupuse de clasă  $C^2$  în domeniul de definiție, se numesc *potențiale electrodinamice* și joacă un rol esențial în teoria câmpului electromagnetic. Menționăm, deocamdată, faptul evident că problema determinării câmpului (șase componente scalare) se reduce la problema determinării potențialelor electrodinamice (patru mărimi scalare). Teoria generării și propagării câmpului electromagnetic, pe care o vom dezvolta în următoarele paragrafe, va proba utilitatea unei astfel de reprezentări.

### Ecuatiile diferențiale ale potențialelor electrodinamice

Să înlocuim (3.63) și (3.64) în ecuațiile lui Maxwell cu surse

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} + \epsilon \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}, \quad (3.65)$$

scrise pentru un mediu omogen și izotrop, caracterizat prin ecuațiile constitutive  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ . Utilizând (A.48), avem

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} = \\ &= \mu \mathbf{j} - \epsilon \mu \nabla \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} \right) - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

sau

$$\Delta \mathbf{A} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{j} + \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon \mu \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} \right). \quad (3.66)$$

De asemenea

$$\nabla \cdot \left( -\nabla \mathcal{V} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\Delta \mathcal{V} - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \frac{\rho}{\epsilon},$$

sau, dacă adăugăm în ambii membri termenul  $\epsilon\mu\partial^2 \mathcal{N}/\partial t^2$ ,

$$\Delta \mathcal{N} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} \right). \quad (3.67)$$

Ecuatiile (3.66) și (3.67) formează un sistem de 4 ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea pentru potențialele  $\mathbf{A}$  și  $\mathcal{N}$ .

Precum știm (vezi 2.45), potențialul vector  $\mathbf{A}$  este în mod unic determinat - între altele - dacă  $\nabla \cdot \mathbf{A} = \chi$ , unde  $\chi$  este o funcție dată. Ecuatiile (3.66) și (3.67) sugerează alegerea  $\chi = -\epsilon\mu\partial \mathcal{N}/\partial t$ , sau

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} = 0, \quad (3.68)$$

relație numită *condiția Lorentz*. În acest caz, ecuațiile (3.66) și (3.67) se reduc la

$$\Delta \mathbf{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{j}, \quad (3.69)$$

$$\Delta \mathcal{N} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}, \quad (3.70)$$

care sunt ecuații de tip hiperbolic, neomogene. Rezolvarea acestor ecuații permite ulterior determinarea câmpului electromagnetic cu ajutorul relațiilor (3.63) și (3.64). Acestei chestiuni îi vom consacra un paragraf special, în Cap.IV.

În multe cazuri este mai avantajos să alegem

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \chi = 0, \quad (3.71)$$

relație numită *condiția Coulomb*. Ecuatiile (3.66) și (3.67) se scriu atunci sub forma

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu \mathbf{j} + \epsilon\mu \nabla \left( \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} \right), \\ \Delta \mathcal{N} &= -\frac{\rho}{\epsilon}, \end{aligned}$$

ultima fiind formal identică cu ecuația lui Poisson (1.35). Soluția acestei ecuații ne este cunoscută

$$\mathcal{N}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau'.$$

Utilizând această relație și ecuația de continuitate  $\partial\rho/\partial t = -\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t)$ , obținem ecuația pentru  $\mathbf{A}$  sub forma

$$\Delta \mathbf{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{j} - \frac{\mu}{4\pi} \nabla \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau'. \quad (3.72)$$

Pentru a interpreta membrul drept al ecuației (3.72), vom stabili o identitate satisfăcută de *orice* funcție vectorială, fie aceasta  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ . Avem :

$$\nabla \times \left[ \nabla \times \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' \right] = \nabla \left[ \nabla \cdot \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' \right] - \Delta \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau',$$

sau, dacă utilizăm (1.39) și (1.43),

$$\begin{aligned} & \nabla \times \left[ \nabla \times \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' \right] = \\ & = -\nabla \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\tau' + \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) [4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] d\tau' = \\ & = \nabla \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' + 4\pi \mathbf{j}(\mathbf{r}, t), \end{aligned}$$

unde am aplicat teorema Green-Gauss-Ostrogradski pentru a elimina, prin procedeul cunoscut, o integrală de suprafață. Din ultima relație deducem

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi} \nabla \times \left[ \nabla \times \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' \right] - \frac{1}{4\pi} \nabla \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' = \\ &= \mathbf{j}_{tr} + \mathbf{j}_{long}, \end{aligned} \quad (3.73)$$

ceea ce înseamnă că am descompus  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  în două componente vectoriale, una transversală și una longitudinală, astfel ca

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_{tr} = 0 ; \quad \nabla \times \mathbf{j}_{long} = 0.$$

Denumirile de "transversal" și "longitudinal" au fost date prin analogie cu posibilitățile de polarizare ale unei unde plane, caracterizate prin

$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  sau  $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ , unde  $\mathbf{A}$  este un câmp vectorial (vezi Cap.IV). Cu ajutorul lui (3.73), obținem din (3.72)

$$\Delta \mathbf{A} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu(\mathbf{j} - \mathbf{j}_{long}) = -\mu \mathbf{j}_{tr} \quad (3.74)$$

Așadar, în condițiile etalonării Coulomb componenta  $\mathbf{j}_{tr}$  joacă rol de sursă pentru  $\mathbf{A}$ . Din ultima ecuație se determină  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ , apoi câmpul  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  cu ajutorul relațiilor (3.63) și (3.64).

### Transformarea de etalon

Relațiile (3.63) și (3.64) nu definesc în mod unic potențialele electrodinamice  $\mathbf{A}$  și  $\mathcal{N}$ . Într-adevăr, dacă alegem

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \psi, \quad (3.75)$$

unde  $\psi(\mathbf{r}, t)$  este o funcție scalară arbitrară de poziție și timp, obținem același câmp  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times (\nabla \psi) = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}.$$

Introducând (3.75) în (3.64), mai avem:

$$\mathbf{E}' = -\nabla \mathcal{N} - \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A}' - \nabla \psi) = -\nabla \left( \mathcal{N} - \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t},$$

prin urmare, pentru a obține același câmp trebuie să luăm

$$\mathcal{N}' = \mathcal{N} - \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (3.76)$$

În concluzie, transformările (3.75) și (3.76) lasă neschimbat câmpul electromagnetic  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ . Proprietatea câmpului electromagnetic de a rămâne nemodificat la clasa de transformări (3.75) și (3.76) se numește *invarianță de etalon* (*gauge invariance* în limba engleză), iar relațiile (3.75) și (3.76) poartă numele de *transformări de etalon*.

### Potențialele electrodinamice ale câmpului electromagnetic microscopic

Utilizând același procedeu ca în paragraful precedent, din ecuațiile Maxwell-Lorentz (3.12)<sub>2,3</sub> putem defini câmpul electromagnetic microscopic  $\mathbf{e}, \mathbf{b}$  cu ajutorul potențialelor electrodinamice microscopice  $\mathbf{a}, \phi$  prin relațiile

$$\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a} ; \quad \mathbf{a} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}, \quad (3.77)$$

supuse transformărilor de etalon

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \nabla f ; \quad \phi' = \phi - \frac{\partial f}{\partial t} \quad (3.78)$$

și satisfăcând condiția Lorentz

$$\nabla \cdot \mathbf{a} + \epsilon_o \mu_o \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0. \quad (3.79)$$

### Alte tipuri de potențiale electrodinamice

În cazul unui mediu omogen și izotrop, lipsit de sarcină electrică spațială ( $\rho = 0$ ) și curenți de conducție ( $\mathbf{j} = 0$ ), există posibilitatea de a defini câmpul electromagnetic cu ajutorul altor tipuri de potențiale, cum sunt, de pildă, *antipotențialele* și *vectorul lui Hertz*.

a) **Antipotențiale.** Ecuațiile lui Maxwell cu surse, considerate în ipoteza  $\rho = 0, \mathbf{j} = 0$ , se scriu:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 ; \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (3.80)$$

Forma ecuațiilor (3.80) este analoagă celei a ecuațiilor (3.62), care ne-au servit la definirea potențialelor electrodinamice  $\mathbf{A}, \mathcal{V}$ , ceea ce sugerează introducerea setului de potențiale  $\mathbf{A}^*, \mathcal{V}^*$ , cu ajutorul cărora câmpul  $\mathbf{D}, \mathbf{H}$  se va scrie

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = -\nabla \times \mathbf{A}^* ; \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} = -\nabla \mathcal{V}^* - \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t},$$

de unde

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\epsilon} \nabla \times \mathbf{A}^* ; \quad \mathbf{B} = -\mu \left( \nabla \mathcal{N}^* + \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t} \right). \quad (3.81)$$

Este ușor de arătat că potențialele  $\mathbf{A}^*$  și  $\mathcal{N}^*$  satisfac ecuațiile cu derivate parțiale

$$\Delta \mathbf{A}^* - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}^*}{\partial t^2} = 0 ; \quad \Delta \mathcal{N}^* - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathcal{N}^*}{\partial t^2} = 0, \quad (3.82)$$

dacă este satisfăcută condiția Lorentz

$$\nabla \mathbf{A}^* + \epsilon \mu \frac{\partial \mathcal{N}^*}{\partial t} = 0. \quad (3.83)$$

Potențialele  $\mathbf{A}^*$  și  $\mathcal{N}^*$  se numesc (impropriu) *antipotențiale* și au o sferă de aplicabilitate mai restrânsă decât cea a potențialelor  $\mathbf{A}$  și  $\mathcal{N}$ .

b) **Potențialul (vectorul) lui Hertz.** După cum a arătat **H.Hertz**, în locul potențialelor  $\mathbf{A}$  și  $\mathcal{N}$  poate fi utilizat un singur câmp vectorial  $\mathbf{Z}(\mathbf{r}, t)$ , cunoscut sub numele de *vectorul lui Hertz*. Acesta se definește observând că ecuația (3.68) (condiția Lorentz) este identic satisfăcută dacă, pe de o parte, alegem

$$\mathbf{A} = \epsilon \mu \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t}, \quad (3.84)$$

iar pe de alta

$$\mathcal{N} = -\nabla \cdot \mathbf{Z}. \quad (3.85)$$

În acest caz, câmpul electromagnetic  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  se exprimă cu ajutorul vectorului lui Hertz prin relațiile

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla \mathcal{N} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{Z}) - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2}, \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = \epsilon \mu \nabla \times \left( \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (3.86)$$

Ecuația cu derivate parțiale de ordinul al doilea pe care o satisface potențialul  $\mathbf{Z}$  se găsește utilizând ecuația lui Maxwell

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (3.87)$$

Înlocuind aici (3.86) și integrând în raport cu timpul, avem

$$\Delta \mathbf{Z} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.88)$$

Un raționament analog ne permite să definim potențialul lui Hertz cu ajutorul antipotențialelor  $\mathbf{A}^*$  și  $\mathcal{N}^*$  definite mai sus. Alegând

$$\mathbf{A}^* = \epsilon\mu \frac{\partial \mathbf{Z}^*}{\partial t}; \quad \mathcal{N}^* = -\nabla \cdot \mathbf{Z}^* \quad (3.89)$$

și apelând la (3.81), avem

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= -\nabla \times \mathbf{A}^* = -\epsilon\mu \nabla \times \left( \frac{\partial \mathbf{Z}^*}{\partial t} \right); \\ \mathbf{H} &= -\nabla \mathcal{N}^* - \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{Z}^*) - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{Z}^*}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (3.90)$$

iar ecuația cu derivate parțiale satisfăcută de  $\mathbf{Z}^*$  este

$$\Delta \mathbf{Z}^* - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{Z}^*}{\partial t^2} = 0.$$

Cu ajutorul vectorilor polarizare electrică ( $\mathbf{P}$ ) și magnetică ( $\mathbf{M}$ ), putem scoate în evidență semnificația fizică a potențialelor  $\mathbf{Z}$  și  $\mathbf{Z}^*$ . În acest sens, vom admite că, în general, există o polarizație electrică  $\mathbf{P}_o \neq 0$  și una magnetică  $\mathbf{M}_o \neq 0$ , în lipsa câmpului exterior polarizant. Apelând la (1.97) și (2.74), avem :

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_o + \alpha \mathbf{E} = \mathbf{P}_o + \epsilon_o(\epsilon_r - 1)\mathbf{E},$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_o + \chi \mathbf{H} = \mathbf{M}_o + (\mu_r - 1)\mathbf{H},$$

de unde

$$\mathbf{D} = \epsilon_o \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}_o,$$

$$\mathbf{B} = \mu_o(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu \mathbf{H} + \mu_o \mathbf{M}_o.$$

Să luăm în discuție două cazuri particulare:



a)  $\mathbf{M}_o = 0$ . Ecuația lui Maxwell  $\nabla \times \mathbf{H} = \partial \mathbf{D} / \partial t$  conduce atunci, prin integrare în raport cu timpul, la următoarea soluție (cea mai simplă!)

$$\Delta \mathbf{Z} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} = - \frac{1}{\epsilon_o} \mathbf{P}_o, \quad (3.91)$$

ceea ce arată că  $\mathbf{P}_o$  este sursa câmpului vectorial  $\mathbf{Z}$ . Din acest motiv, vectorul lui Hertz  $\mathbf{Z}$  se mai numește *potențial de polarizare electrică*.

b)  $\mathbf{P}_o = 0$ . De data aceasta vom face apel la cealaltă ecuație de evoluție a lui Maxwell, adică  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ , sau, având în vedere cele de mai sus,

$$\frac{1}{\epsilon} \nabla \times \mathbf{D} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mu_o \frac{\partial \mathbf{H}_o}{\partial t}.$$

Exprimând  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  cu ajutorul lui  $\mathbf{Z}^*$  (vezi 3.90) și integrând în raport cu timpul, obținem (ca cea mai simplă soluție) :

$$\Delta \mathbf{Z}^* - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{Z}^*}{\partial t^2} = - \frac{\mu_o}{\mu} \mathbf{M}_o. \quad (3.92)$$

Întrucât  $\mathbf{M}_o$  apare aici ca *sursă a câmpului  $\mathbf{Z}^*$* , acesta din urmă mai poartă numele de *potențial de polarizare magnetică*.

### §3.8. Utilizarea potențialelor electrodinamice în deducerea analitică a unor ecuații fundamentale din electrodinamică

Formalismul mecanicii analitice este un instrument matematic deosebit de util în stabilirea unor ecuații fundamentale din dinamica particulelor electrizate, din teoria câmpului (în particular a celui electromagnetic) etc. Exprimarea câmpului electromagnetic  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  în funcție de setul de potențiale  $\mathbf{A}, \mathcal{V}$  permite aplicarea formalismului analitic în deducerea ecuațiilor mișcării atât pentru sisteme discrete (sarcini punctiforme aflate în câmp), cât și pentru sisteme continue (cum este, de pildă, însuși câmpul). (Menționăm faptul că reprezentarea câmpului cu ajutorul potențialelor  $\mathbf{A}, \mathcal{V}$  nu este unica posibilă, dar este cel mai

frecvent întâlnită în literatură, motiv pentru care o vom utiliza și noi în paragraful de față). În cele ce urmează vom justifica afirmațiile de mai sus prin două exemple.

**1. Deducerea analitică a ecuației de mișcare a unei sarcini punctiforme în câmp electromagnetic exterior.** Fie o sarcină punctiformă (de pildă, un electron), având masa  $m$  și sarcina (în modul)  $e$ , care se deplasează cu viteza  $\mathbf{v}$  în câmpul electromagnetic  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ . Lagrangeanul unui astfel de sistem, potrivit principiului superpoziției, se va compune din două părți (termeni) : lagrangeanul particulei libere (în absența câmpului), la care se adaugă lagrangeanul de interacțiune dintre particula electrizată și câmp:

$$L = L_o + L_{int} = \frac{1}{2} \dot{x}_k \dot{x}_k - e \mathcal{N} + e \dot{x}_k A_k, \quad (3.93)$$

unde am utilizat convenția însumării după indici repetați (convenția lui Einstein). Ecuațiile diferențiale ale mișcării sistemului (particulei) sunt ecuațiile lui Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = \overline{1, n}), \quad (3.94)$$

unde  $q_j$  sunt coordonatele generalizate, iar  $\dot{q}_j$  vitezele generalizate. În cazul nostru, întrucât particula nu este supusă la legături (forța este conservativă), avem  $q_i = x_i$  ;  $\dot{q}_i = \dot{x}_i = v_i$  ( $i = \overline{1, 3}$ ). Efectuând derivatele, obținem:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m \dot{x}_k \delta_{ik} + e A_k \delta_{ik} = m \dot{x}_i + e A_i ; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) &= m \ddot{x}_i + e \frac{dA_i}{dt} = m \ddot{x}_i + e \left( \frac{\partial A_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right) ; \\ \frac{\partial L}{\partial x_i} &= -e \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x_i} + e v_k \frac{\partial A_k}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Înlocuind aceste rezultate în (3.94), obținem

$$m \ddot{x}_i = -e \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x_i} - e \frac{\partial A_i}{\partial t} + e v_k \left( \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right).$$

Expresia din paranteză, după cum se poate ușor constata, este un tensor antisimetric de ordinul al doilea, notat cu  $F_{ik}$  și definit pe spațiul euclidian tridimensional  $E_3$ . Dacă  $B_s$  sunt componentele pseudovectorului dual (asociat) tensorului antisimetric  $F_{ik}$ , avem (vezi A.57):

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} = \varepsilon_{ikm} B_m ; \quad (i, k, m = 1, 2, 3).$$

De aici

$$B_s = \frac{1}{2} \varepsilon_{sik} F_{ik} = \frac{1}{2} \varepsilon_{sik} \left( \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right) = \varepsilon_{sik} \frac{\partial A_k}{\partial x_i} = (\nabla \times \mathbf{A})_s.$$

Prin urmare, ecuația de mișcare devine

$$m\ddot{x}_i = e \left( -\frac{\partial N}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) + e \varepsilon_{iks} v_k B_s, \quad (3.95)$$

sau, în fine, dacă utilizăm relațiile dintre câmp și potențiale (3.63), (3.64)

$$m\ddot{x}_i = e (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_i ; \quad m\ddot{\mathbf{r}} = e (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (3.96)$$

care este cunoscuta ecuație de mișcare a sarcinii punctiforme în câmpul  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ , membrul drept reprezentând forța cu care câmpul exterior acționează asupra particulei electrizate.

**2. Deducerea analitică a ecuațiilor lui Maxwell.** Studiul fenomenelor electrodinamice scoate în evidență, între altele, faptul că sursele se prezintă sub formă de densități (densitate de sarcină, densitate de curent). Pe de altă parte, formularea analitică a dinamicii sistemelor continue (în particular câmpul) presupune definirea (construcția) densității de lagrangean corespunzătoare modelului studiat. Odată cunoscută densitatea de lagrangean, evoluția în timp și spațiu a sistemului (modelului) se poate cunoaște prin rezolvarea sistemului de ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea (ecuațiile Euler-Lagrange)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^{(s)}} - \frac{\partial}{\partial x_J} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,J}^{(s)}} \right) = 0 \quad (s = \overline{1, h}, \quad J = \overline{1, n}), \quad (3.97)$$

unde  $\mathcal{L}(x_J, \phi^{(s)}, \phi_{,J}^{(s)})$  este densitatea de lagrangean,  $x_J$  - variabilele independente,  $\phi^{(s)}$  - variabilele dependente (parametrii variaționali), iar  $\phi_{,J}^{(s)} = \partial\phi^{(s)}/\partial x_J$ . Dacă alegem  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = t$ , sistemul (3.97) se scrie

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^{(s)}} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,i}^{(s)}} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,t}^{(s)}} \right) = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.98)$$

Potrivit principiului superpoziției, densitatea de lagrangean  $\mathcal{L}$  se compune din două părți (termeni) : o parte  $\mathcal{L}_o$ , corespunzătoare câmpului liber, și o parte  $\mathcal{L}_{int}$  ce exprimă interacțiunea dintre câmp și surse :  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_o + \mathcal{L}_{int}$ . Admițând că interacțiunile au loc într-un mediu omogen și izotrop, se poate arăta că (vezi Vol.II)

$$\mathcal{L}_o = \frac{1}{2}\epsilon E^2 - \frac{1}{2\mu} B^2, \quad (3.99)$$

expresie dată de *Larmor* ce constituie un invariant relativist.

Densitatea lagrangeanului de interacțiune  $\mathcal{L}_{int}$  se obține din (3.96) prin împărțire la volumul în care este distribuită sarcina  $e$

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{e}{\Delta\tau} (-\mathcal{N} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) = -\rho \mathcal{N} + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} = -\rho \mathcal{N} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}. \quad (3.100)$$

Densitatea de lagrangean a câmpului în prezența surselor este așadar

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\epsilon E_m E_m - \frac{1}{2\mu} B_m B_m - \rho \mathcal{N} + j_m A_m. \quad (3.101)$$

Variabilele  $\phi^{(s)}$  vor fi în cazul nostru  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) și  $\mathcal{N}$ , prin urmare vom utiliza relațiile (3.63) și (3.64) dintre câmp și potențiale

$$E_m = -\mathcal{N}_{,m} - A_{m,t}; \quad B_m = v_{msj} A_{j,s}. \quad (3.102)$$

Alegând, pentru început,  $\phi^{(1,2,3)} \equiv A_k$ , avem din (3.98):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_k} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{k,i}} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{k,t}} \right) = 0. \quad (3.103)$$

Efectuând calculele, avem succesiv:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_k} &= j_m \delta_{ik} = j_k ; \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{k,i}} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_m} \frac{\partial B_m}{\partial A_{k,i}} = -\frac{1}{\mu} B_m \varepsilon_{msj} \delta_{jk} \delta_{si} = -\frac{1}{\mu} \varepsilon_{ikm} B_m ; \\
\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{k,i}} \right) &= -\frac{1}{\mu} \varepsilon_{ikm} B_{m,i} = \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{B})_k = (\nabla \times \mathbf{H})_k ; \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{k,t}} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_m} \frac{\partial E_m}{\partial A_{k,t}} = \epsilon E_m (-\delta_{ik}) = -\epsilon E_k = -D_k ; \\
\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{k,t}} \right) &= -\frac{\partial D_k}{\partial t} .
\end{aligned}$$

Înlocuind aceste rezultate în (3.103), găsim

$$(\nabla \times \mathbf{H})_k = j_k + \frac{\partial D_k}{\partial t},$$

adică ecuația cu surse a lui Maxwell (3.39), în proiecție pe direcția  $x_k$ .

În fine, dacă alegem  $\phi^{(4)} = \mathcal{N}$ , din (3.98) rezultă o singură ecuație scalară

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{N}} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{N}_{,i}} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{N}_{,t}} \right). \quad (3.104)$$

Efectuând calculele, obținem :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{N}} &= -\rho ; \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{N}_{,i}} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_m} \frac{\partial E_m}{\partial \mathcal{N}_{,i}} = \epsilon E_m (-\delta_{im}) = -\epsilon E_i = -D_i ; \\
\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{N}_{,i}} \right) &= -D_{i,i} ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{N}_{,t}} = 0,
\end{aligned}$$

iar (3.104) conduce la

$$D_{i,i} = \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho,$$

adică cealaltă ecuație cu surse a lui Maxwell (3.24). Cu aceasta, aplicația este încheiată.

**Observație.** În exemplul de mai sus, utilizând drept variabile dependente (funcții de câmp) potențialele electrodinamice deduse din ecuațiile fără surse ale lui Maxwell și aplicând un formalism analitic adecvat, am dedus celălalt grup de ecuații (cele cu surse). Problema se poate pune, însă, și în alt mod : cunoscând *un grup* al ecuațiilor lui Maxwell, fie acestea cele cu surse, să găsim relațiile (3.102), ce conduc la *cel de al doilea grup de ecuații* (ecuațiile fără surse). Folosind (3.99), vom construi densitatea de lagrangean

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\epsilon E^2 - \frac{1}{2\mu} B^2 - \mathcal{N}(\epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} - \rho) + \mathbf{A} \cdot \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mathbf{j} \right), \quad (3.105)$$

unde  $\mathcal{N}(\mathbf{r}, t)$  și  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  sunt multiplicatori lagrangeeni, funcții de coordonate și timp. Aici rolul de parametri variaționali îl vor juca componentele  $E_i$ ,  $B_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) ale vectorilor de câmp, iar ecuațiile cu surse au fost utilizate ca *legături* pe care sunt obligați să le satisfacă acești vectori. Alegând  $\phi^{(1,2,3)} = E_k$ , găsim  $(3.102)_1$ , iar pentru  $\phi^{(4,5,6)} = B_k$ , obținem  $(3.102)_2$ . Din aceste relații, utilizând procedeul cunoscut, se obțin imediat ecuațiile fără surse.

## PROBLEME

1. Să se scrie ecuațiile lui Maxwell, precum și relațiile dintre câmp și potențiale, în coordonate curbilinii ortogonale, particularizând apoi pentru coordonate sferice și cilindrice.

2. Să se deducă ecuația diferențială de mișcare a unei sarcini punctiforme, de masă  $m$  și sarcină (în modul)  $e$ , ce se deplasează în câmpul electromagnetic  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ , prin formalismul hamiltonian.

3. Să se arate că, dacă într-un mediu conductor omogen se poate neglija curentul de deplasare în raport cu cel de conducție, atunci densitatea  $\mathbf{j}$  a curentului de conducție satisface ecuațiile

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 ; \quad \Delta \mathbf{j} = \lambda \mu \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t},$$

unde  $\lambda$  este conductivitatea electrică. Să se arate că vectorii de câmp  $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B}$  satisfac relații analoage.

4. Un flux de particule este ejectat radial de pe suprafața unei sfere acoperită cu substanță radioactivă ; rezultă un curent radial, de aceeași amplitudine în toate direcțiile. Fie  $r$  raza sferei,  $Q(r)$  sarcina sa interioară,  $\mathbf{j}(r)$  densitatea curentului radial și  $\mathbf{E}(r)$  intensitatea câmpului electric. Să se exprime  $\mathbf{j}(r)$  în funcție de  $Q(r)$  și  $\mathbf{E}(r)$ . Utilizând ecuațiile lui Maxwell, să se determine câmpul magnetic produs de curenți.

### §3.9. Ecuațiile câmpului electromagnetic pentru medii în mișcare

Teoria dezvoltată până în prezent a avut la bază ipoteza că mediul în care au loc fenomenele electromagnetice este *în repaus* față de observator. Altfel spus, determinările se efectuează în sistemul de referință atașat mediului. În aceste condiții am dedus, între altele, sistemul ecuațiilor lui Maxwell, prin generalizarea unor legi fundamentale ale teoriei curenților staționari și electromagnetismului.

Formularea sistemului de ecuații ce descriu câmpul electromagnetic pentru medii în mișcare (față de observator) nu poate fi tratată unitar decât utilizând teoria relativității. În acest paragraf vom da, totuși, o teorie clasică, bazată pe formalismul mecanicii mediilor continue și valabilă doar în cazul vitezelor mici în raport cu viteza luminii în vid. Această teorie a fost dezvoltată de H.Hertz și, îndeosebi, de H.A.Lorentz. Cunoașterea unui astfel de raționament are o deosebită importanță principală deoarece, așa cum vom vedea în Vol.II, teoria relativității a apărut și s-a dezvoltat în cadrul electrodinamicii corpurilor în mișcare.

#### Ecuațiile fără surse

Menționăm, de la bun început, că mișcarea mediului va afecta doar ecuațiile (lui Maxwell) în care intervine operatorul de derivare în raport cu timpul. Într-adevăr, dacă într-un anumit sistem de referință (de pildă, cel al observatorului) câmpul  $\mathbf{B}$  este solenoidal, el va păstra această proprietate în orice sistem de referință ce are față de primul o mișcare rectilinie și uniformă (referențial inerțial). Cu alte cuvinte,

ecuația  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  își va păstra forma, indiferent de reperul inerțial considerat. În cele ce urmează vom presupune că mediul este în mișcare uniformă cu viteza  $\mathbf{v}$ , mică în comparație cu viteza luminii în vid.

Fie  $C(t)$  este un contur închis legat de corp, iar  $S(t)$  o suprafață ce se sprijină pe contur. Ecuația ce va conține variația în timp a lui  $\mathbf{B}$  se obține atunci din legea inducției

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{S} = -\frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (3.106)$$

Întrucât, de data aceasta, suprafața variază în timp, este necesar a stabili regula de derivare în raport cu timpul a fluxului câmpului  $\mathbf{B}$  din (3.106). În acest scop vom face apel la mecanica mediilor continue.

Presupunem că la momentul inițial  $t = t_o$  mediul continuu ocupă un domeniu spațial  $D_o$ , de volum  $V_o$ , mărginit de suprafața  $S_o$ . Aceste elemente definesc *configurația* mediului la momentul inițial  $t_o$ . Să presupunem, de asemenea, că la momentul  $t > t_o$  *același mediu* (deci același număr de particule) ocupă domeniul spațial  $D$ , de volum  $V$ , mărginit de suprafața  $S$ . În acest caz, dacă  $\mathbf{r}_o$  este vectorul de poziție al unei particule (molecule)  $P_o$  din  $D_o$  iar  $\mathbf{r}$  vectorul de poziție al *aceleiași* particule, care la momentul  $t$  se află în  $D$ , putem scrie

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_o, t), \text{ sau } x_i = x_i(x_j^o, t) \quad (i, j = \overline{1, 3}). \quad (3.107)$$

Pentru  $\mathbf{r}_o$  fixat și  $t$  variabil, aceste ecuații definesc *traectoria* particulei supusă observației, iar pentru  $t$  fixat și  $\mathbf{r}_o$  descriind domeniul  $D_o$ ,  $\mathbf{r}$  descrie domeniul  $D$ . În această ultimă ipostază, ecuațiile (3.107) definesc o aplicație a spațiului euclidian în el însuși, aplicație ce depinde de parametrul  $t$ .

Vom numi *varietate materială* orice varietate (punct, curbă, suprafață, volum) formată din particule ale mediului. De pildă, ecuația unei suprafețe materiale  $S_o$  din  $D_o$ , sub formă parametrică, se scrie

$$x_i^o = x_i^o(q_1, q_2) \quad (i = \overline{1, 2, 3}), \quad (3.108)$$

iar ecuația *imaginii* ei  $S$  din  $D$  va fi

$$x_i = x_i[\mathbf{r}_o(q_1, q_2), t] = x_i(q_1, q_2, t). \quad (3.109)$$



Întrucât, prin ipoteză, particulele își păstrează individualitatea (unui punct din  $D_o$  îi corespunde un singur punct din  $D$  și reciproc), acest lucru din punct de vedere matematic este un exemplu de corespondență biunivocă și se exprimă prin condiția

$$J = \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j^o}\right) = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(x_1^o, x_2^o, x_3^o)} \neq 0, \quad (3.110)$$

unde  $J$  este determinantul funcțional al transformării (3.107) ( $t$  fixat).

Utilizând (3.110), putem demonstra că imaginea unei varietăți materiale este o varietate de același ordin. De pildă, în cazul unei suprafețe (caz ce ne interesează în cele ce urmează), avem

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j^o} \frac{\partial x_j^o}{\partial q_\alpha} \quad (i, j = \overline{1, 3}; \alpha = 1, 2),$$

deci, potrivit lui (3.110),

$$\text{rang} \left\| \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \right\| = \text{rang} \left\| \frac{\partial x_j^o}{\partial q_\alpha} \right\| = 2.$$

Pe baza acestor elemente pregătitoare, să considerăm derivata

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}, \quad (3.111)$$

unde  $S(t)$  este o suprafață materială, iar  $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$  un câmp vectorial arbitrar. Pentru a efectua derivata (3.111), este necesar să calculăm derivata elementului de suprafață  $d\mathbf{S}$ . Utilizând reprezentarea parametrică, vom scrie elementul de suprafață construit pe vectorii  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} dq_1$  și  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} dq_2$ , tangenți la curbele  $q_1 = \lambda_1$ , respectiv  $q_2 = \lambda_2$ , sub forma (vezi D.8)

$$d\mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} dq_1 dq_2; \quad dS_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_j}{\partial q_1} \frac{\partial x_k}{\partial q_2} dq_1 dq_2. \quad (3.112)$$

Este ușor de arătat că determinantul unei matrice oarecare  $3 \times 3$ , fie aceasta  $A$ , se poate scrie

$$\det A = \varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k},$$

ceea ce înseamnă că este adevărată și relația

$$\varepsilon_{lmn} (\det A) = \varepsilon_{ijk} A_{li} A_{mj} A_{nk}.$$

Cum în cazul nostru  $\det A = J$ , avem

$$J \varepsilon_{lmn} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial x_l^o} \frac{\partial x_j}{\partial x_m^o} \frac{\partial x_k}{\partial x_n^o}. \quad (3.113)$$

Să scriem (3.112) sub forma

$$dS_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_j}{\partial x_m^o} \frac{\partial x_k}{\partial x_n^o} \frac{\partial x_m^o}{\partial q_1} \frac{\partial x_n^o}{\partial q_2} dq_1 dq_2.$$

Înmulțind această relație cu  $\frac{\partial x_i}{\partial x_l^o} \frac{\partial x_l^o}{\partial x_k} = \delta_{ik}$ , găsim

$$dS_k = J \frac{\partial x_l^o}{\partial x_k} dS_l^o. \quad (3.114)$$

Derivata din (3.111) implică efectuarea derivatei  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_l^o}{\partial x_k} \right)$ . Fie, în acest sens, variația elementară arbitrară  $dx_l^o = \frac{\partial x_l^o}{\partial x_k} dx_k$ . Avem :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_l^o}{\partial x_k} \right) dx_k + \frac{\partial x_l^o}{\partial x_k} dv_k = 0 \quad (v_k = \frac{dx_k}{dt}).$$

Dacă în ultima relație înlocuim  $dv_k = \frac{\partial v_k}{\partial x_i} dx_i$ , schimbăm între ei indicii de însumare și ținem seama că  $dx_k$  este arbitrar, obținem:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_l^o}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial x_l^o}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \quad (3.115)$$

Utilizând (3.115) și teorema lui Euler (2.11), să efectuăm derivata în raport cu timpul a elementului de suprafață (3.114). Avem :

$$\frac{d}{dt} (dS_i) = \left[ J (\nabla \cdot \mathbf{v}) \frac{\partial x_l^o}{\partial x_i} - J \frac{\partial x_l^o}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right] dS_l^o =$$

$$= (\nabla \cdot \mathbf{v}) dS_i - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} dS_k.$$

Derivata (3.111) se scrie atunci

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_S a_i dS_i &= \int_S \left\{ \frac{da_i}{dt} dS_i + a_i \left[ (\nabla \cdot \mathbf{v}) dS_i - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} dS_k \right] \right\} = \\ &= \int_S \left[ \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{a} \nabla \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] \cdot d\mathbf{S}. \end{aligned}$$

Ultimii doi termeni îi vom înlocui din relația vectorială (vezi A.44)

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{v}) = \mathbf{a} \nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{a} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{v},$$

iar derivata substanțială  $d\mathbf{a}/dt$ , potrivit teoriei mecanicii fluidelor, o vom scrie

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{a}.$$

Obținem atunci, în sfârșit,

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{D\mathbf{a}}{Dt} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \left[ \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{a} \right] \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.116)$$

Notăția

$$\frac{D\mathbf{a}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{a}$$

apartține lui Lorentz, motiv pentru care derivata ce o indică se mai numește *derivată lorentziană*.

Considerațiile de până acum sunt în totalitate valabile în teoria câmpului. Fie  $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ , ceea ce înseamnă că  $\nabla \cdot \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , prin urmare

$$\frac{\delta}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \left[ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \right] \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.117)$$

Notând cu  $\mathbf{E}'$  câmpul electric măsurat de un observator legat de mediul în mișcare, vom scrie legea inducției (3.106) sub forma

$$\oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \left[ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \right] \cdot d\mathbf{S} \quad (3.118)$$

sau, dacă aplicăm teorema Stokes-Ampère (A.31) și aranjăm termenii în mod convenabil,

$$\nabla \times (\mathbf{E}' - \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.119)$$

unde am notat  $\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ .

Așadar, pentru ca ecuația lui Maxwell (3.119) să-și păstreze forma, este necesar ca în sistemul de referință legat de corpul în mișcare să avem, pe de o parte

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B}, \quad (3.120)$$

iar pe de altă parte coordonatele spațiale și cea temporală să satisfacă transformarea Galilei-Newton specifică mecanicii clasice :  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t$ ,  $t' = t$ . În consecință, în cadrul oferit de mecanica clasică, la trecerea de la un sistem de referință la altul câmpul  $\mathbf{B}$  nu se modifică, în timp ce  $\mathbf{E}$  suferă transformarea (3.120)<sub>1</sub>. Câmpul

$$\mathbf{E}'' = \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (3.121)$$

apărut ca urmare a deplasării mediului, poartă numele de *câmp electric efectiv*.

### Observații

a) Cei trei termeni din (3.116) au următoarea semnificație : primul termen exprimă variația fluxului vectorului  $\mathbf{a}$  datorită variației vectorului  $\mathbf{a}$  în timp; al doilea - variația fluxului prin suprafața ce se sprijină pe conturul în mișcare, iar al treilea se datorează trecerii suprafeței printr-o regiune neomogenă a câmpului.

b) Insistăm asupra ipotezei în care am dezvoltat teoria de mai sus : viteza mediului este mult mai mică decât viteza  $c$  a luminii în vid. Așa cum vom vedea în Vol.II, relațiile (3.120) sunt valabile doar în cazul  $|\mathbf{v}| \ll c$ .

### Ecuațiile cu surse

Ne amintim (vezi §3.2) că prin medierea ecuațiilor Maxwell-Lorentz am dedus

$$\frac{1}{\mu_o} \nabla \times \mathbf{B} = \langle \mathbf{j}_{micro} \rangle + \epsilon_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad \epsilon_o \nabla \cdot \mathbf{E} = \langle \rho_{micro} \rangle \quad (3.122)$$

și am determinat

$$< \mathbf{j}_{micro} > = \mathbf{j} + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} ; \quad < \rho_{micro} > = \rho - \nabla \cdot \mathbf{P}, \quad (3.123)$$

stabilind următoarele ecuații cu surse pentru medii în repaus:

$$\nabla \times \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_o} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_o \mathbf{E} + \mathbf{P}) ; \quad \nabla \cdot (\epsilon_o \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho. \quad (3.124)$$

Dacă mediul este în mișcare, ecuația (3.124)<sub>2</sub> rămâne neschimbată, în timp ce deducerea unor termeni din ecuația (3.124)<sub>1</sub> trebuie reconsiderată. În primul rând, alături de curentul de conducție trebuie să ținem seama și de curentul de convecție

$$\mathbf{v} < \rho_{micro} > = \mathbf{v} (\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}). \quad (3.125)$$

În al doilea rând, curenții produși prin modificarea lui  $\mathbf{P}$  ca urmare a mișcării mediului vor fi dați de derivata lorentziană a lui  $\mathbf{P}$  în raport cu timpul, deci termenul  $\partial \mathbf{P} / \partial t$  din (3.123) va trebui înlocuit cu

$$\frac{D \mathbf{P}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{P}. \quad (3.126)$$

Aceasta rezultă și din faptul că, în cazul mediului în mișcare,

$$< \mathbf{j}_{pol} > = N e < \dot{\mathbf{l}} > = \frac{D}{Dt} (N e < \mathbf{l} >) = \frac{D \mathbf{P}}{Dt}.$$

În locul ecuației (3.124)<sub>1</sub> va trebui să scriem așadar

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \rho \mathbf{v} + \nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{v}) + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (3.127)$$

unde vectorii  $\mathbf{H}$  și  $\mathbf{D}$  au semnificația cunoscută:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_o} - \mathbf{M} ; \quad \mathbf{D} = \epsilon_o \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (3.128)$$

Să scriem ecuațiile cu surse pentru două cazuri particulare.

a) Mediul în mișcare este un fluid conductor nepolarizabil ( $\mathbf{P} = 0$ ,  $\mathbf{M} = 0$ ):

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_o} = \mathbf{j} + \rho \mathbf{v} + \epsilon_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} ; \quad \nabla \cdot (\epsilon_o \mathbf{E}) = \rho. \quad (3.129)$$

Așa cum a arătat *Calkin*<sup>1</sup>, ecuațiile (3.129) pot fi scrise sub forma simetrică, similară celor fără surse (deși sursele există!)

$$\nabla \times \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_o} - \mathbf{P} \times \mathbf{v} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_o \mathbf{E} + \mathbf{P}) ; \quad \nabla \cdot (\epsilon_o \mathbf{E} + \mathbf{P}) = 0 \quad (3.130)$$

cu ajutorul câmpului vectorial  $\mathbf{P}$ , denumit *pseudopolarizare* și definit prin

$$\mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{P} ; \quad \rho = -\nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (3.131)$$

Acest formalism se justifică prin aceea că definițiile (3.131) satisfac identic ecuația de continuitate

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\mathbf{j} + \rho \mathbf{v}) = 0. \quad (3.132)$$

Întrucât ecuațiile (3.130) sunt, formal, lipsite de surse, acestea pot servi la definirea, după metoda deja cunoscută, a câmpului electromagnetic  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  în funcție de setul de *antipotențiale generalizate*  $\mathbf{M}, \psi$  conform relațiilor

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_o} (\nabla \times \mathbf{M} - \mathbf{P}) , \quad \mathbf{B} = \mu_o \left( \nabla \psi + \mathbf{P} \times \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \right). \quad (3.133)$$

După cum se observă, relațiile (3.133) generalizează definiția câmpului electromagnetic cu ajutorul antipotențialelor (3.81). (Diferența de semn este întru totul nesemnificativă).

---

<sup>1</sup> M.G.Calkin, *An Action Principle for Magnetohydrodynamics*, Can.J.Phys., **41**, 1963, p.2241.

Antipotențialele generalizate  $\mathbf{M}$ ,  $\psi$  sunt utile în studiul fluidelor conductoare în mișcare (magnetohidrodinamică), în particular în teoria plasmăi.

b) Mediul în mișcare este un dielectric ( $\mathbf{M} = 0$ ) polarizat ( $\mathbf{P} \neq 0$ ) fără surse ( $\mathbf{j} = 0$ ,  $\rho = 0$ ). În acest caz, ecuațiile cu surse devin

$$\nabla \times \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{P} \times \mathbf{v} \right) = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} ; \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0. \quad (3.134)$$

Comparând (3.134)<sub>1</sub> cu (3.124), rezultă că un dielectric polarizat se comportă, din punct de vedere macroscopic, ca un corp magnetizat, având intensitatea de magnetizare

$$\mathbf{M}_d = \mathbf{P} \times \mathbf{v}.$$

În anul 1888 *Röntgen* confirmă experimental concluziile teoriei lui Lorentz, dezvoltată de noi în acest paragraf, punând în evidență efectul magnetic ce însoțește mișcarea unui dielectric polarizat. Din acest motiv, densitatea de curent corespunzătoare acestei magnetizații  $\nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{v})$  se numește *curent Röntgen*. Cercetările experimentale ale lui Röntgen sunt reluate în 1903 de *Eichenwald* și în 1904 de *Wilson*, acesta din urmă realizând polarizarea unui cilindru dielectric, rotit într-un câmp magnetic paralel cu axul cilindrului. Toate aceste arată, în esență, că un dielectric polarizat în mișcare produce un câmp magnetic ce nu se deosebește calitativ de câmpul magnetic al unui corp magnetizat (magnet permanent).

Sintetizând cele discutate mai sus, să scriem sistemul ecuațiilor câmpului electromagnetic pentru medii în mișcare lentă, sub forma dată de Lorentz :

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} ; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 ; \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \rho \mathbf{v} + \nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{v}) + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} ; \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \end{aligned} \quad (3.135)$$

unde prin  $\rho$  și  $\mathbf{j}$  înțelegem densitatea sarcinilor libere, respectiv a curenților de conducție. Ecuațiile (3.135) trebuie completate cu ecuațiile constitutive (relațiile de material) și ecuațiile de trecere. Aici este locul

să menționăm că legea lui Ohm sub formă diferențială, raportată la mediul în mișcare, se va scrie (vezi 3.120)

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}' = \lambda(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (3.136)$$

### **Observație**

În deducerea ecuațiilor (3.135), Lorentz a neglijat posibilitatea ca mișcarea corpului să afecteze polarizarea magnetică a acestuia. Cercetările ulterioare și îndeosebi teoria relativității au arătat strânsa interdependență dintre cele două tipuri de polarizare, exprimând totodată forma corectă a relației dintre câmpuri. Justificarea acestor afirmații va fi realizată în Vol.II.

### **Problemă**

Utilizând formalismul analitic, să se deducă ecuațiile (3.129) pentru un fluid conductor nepolarizabil.



## CAPITOLUL IV

### UNDE ELECTROMAGNETICE

#### §4.1. Considerații generale

Așa cum vom dovedi în cele ce urmează, câmpul electromagnetic se propagă în diverse medii materiale, inclusiv în spațiul liber, sub formă de unde. În acest scop, este util să stabilim un criteriu de clasificare a mediilor materiale în privința fenomenului de propagare a undelor electromagnetice.

Fie un mediu liniar, omogen și izotrop, caracterizat prin permitivitatea  $\epsilon$ , permeabilitatea  $\mu$  și conductivitatea  $\lambda$ . Ecuațiile constitutive vor fi atunci (pentru cazul unui mediu fix în raport cu observatorul)

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}.$$

În acest caz, suma densităților curenților de conducție și deplasare care intervin în ecuația lui Maxwell cu surse (3.39) se va scrie

$$\mathbf{j}_{tot} = \mathbf{j}_{cond} + \mathbf{j}_{depl} = \lambda \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Să definim raportul

$$\beta = \frac{|\mathbf{j}_{cond}|}{|\mathbf{j}_{depl}|}.$$

În funcție de valoarea acestui raport, distingem trei cazuri :

a)  $\beta \gg 1$  ( $|\mathbf{j}_{cond}| \gg |\mathbf{j}_{depl}|$ ). O astfel de situație o întâlnim în cazul *conductoarelor*, unde vom neglija curentul de deplasare în raport cu cel de conducție.

b)  $\beta \ll 1$  ( $|\mathbf{j}_{cond}| \ll |\mathbf{j}_{depl}|$ ), proprietate ce caracterizează *mediile dielectrice*.

c)  $\beta \simeq 1$  ( $|\mathbf{j}_{cond}| \simeq |\mathbf{j}_{depl}|$ ), ceea ce înseamnă că nu poate fi neglijat unul dintre curenți în raport cu celălalt. Acesta este cazul *semiconductoarelor*.

Să considerăm grupul ecuațiilor de evoluție ale lui Maxwell

$$\frac{1}{\mu} = \lambda \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} ; \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Admițând că nu avem sarcină spațială ( $\rho = 0$ ) și având în vedere ecuațiile de condiție  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ , prin aplicarea rotorului obținem ecuațiile

$$\Delta \mathbf{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \lambda \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \Delta \mathbf{B} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \lambda \mu \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (4.1)$$

Utilizând convenția de mai sus, aceste ecuații vor descrie propagarea undelor electromagnetice în medii semiconductoare. Cazul dielectricilor și cel al conductoarelor vor apărea drept cazuri particulare ale semiconductoarelor, studiul lor fiind realizat prin neglijarea termenului  $\epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$  (conductoare), respectiv a termenului  $\lambda \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  (dielectrici).

Pentru  $\lambda$ ,  $\epsilon$  și  $\mu$  date, tipul unui material (din punct de vedere al propagării undelor) depinde, în mare măsură, de frecvența radiației incidente. Pentru a justifica această afirmație, să admitem că intensitatea câmpului electric variază periodic după legea  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t}$ . În acest caz,

$$\beta = \frac{|\mathbf{j}_{cond}|}{|\mathbf{j}_{depl}|} \sim \frac{\lambda}{\epsilon \omega}.$$

Fie, de exemplu, cazul siliciului, pentru care se cunoaște  $\lambda/\epsilon \simeq 5 \cdot 10^7$  Hz. Dăm mai jos valorile lui  $\beta$  pentru trei frecvențe diferite. (Nu se ține seama de dispersie, prin urmare cifrele sunt doar orientative).

$$\omega = 10^3 \text{ Hz} \rightarrow \beta = 5 \cdot 10^4 \text{ (tip metal) ;}$$

$$\omega = 5.10^7 Hz \rightarrow \beta = 1 \text{ (tip semiconductor) ;}$$

$$\omega = 10^{11} Hz \rightarrow \beta = 5.10^{-4} \text{ (tip dielectric),}$$

deci același material poate fi considerat de tip conductor, semiconductor sau dielectric, în funcție de frecvența radiației incidente. În cele ce urmează vom admite că tipul mediului în discuție este dat exclusiv de parametrii săi intrinseci (permitivitate, permeabilitate, conductivitate etc.)

Din punct de vedere didactic, cel mai indicat este să începem studiul propagării undelor electromagnetice cu mediile de tip dielectric. În acest cadru vom defini unele noțiuni valabile în general, pentru orice tip de mediu, beneficiind totodată de avantajul celui mai simplu caz posibil.

#### §4.2. Propagarea undelor electromagnetice prin medii de tip dielectric

Să studiem – limitându-ne la cadrul teoriei lui Maxwell – proprietățile câmpului electromagnetic în medii dielectrice infinite, omogene și izotrope, nedisipative și nedispersive, lipsite de sarcini și curenți de conducție. Ecuațiile lui Maxwell corespunzătoare acestor condiții vor fi:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} ; \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 ; \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} ; \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 . \end{aligned} \quad (4.1')$$

Aplicând rotorul ecuațiilor de evoluție și având în vedere ecuațiile de condiție, precum și formula (A.48), găsim următoarele două ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea, omogene

$$\Delta \mathbf{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 ; \quad \Delta \mathbf{H} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (4.2)$$

Prin urmare, câmpurile  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{H}$  satisfac ecuația de propagare a undelor de tip D'Alembert

$$\Delta \mathbf{f} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2} = 0 ; \quad \mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t). \quad (4.3)$$

Comparând (4.3) cu (4.2), găsim

$$u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} ; \quad \text{pentru vid } u_o = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_o\mu_o}}. \quad (4.4)$$

Dacă înlocuim  $\epsilon_o, \mu_o$  cu valorile cunoscute, găsim

$$u_o = c \simeq 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}.$$

În concluzie, câmpul electromagnetic caracterizat prin vectorii  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  se propagă în dielectrice *sub formă de unde*. Viteza de fază a acestor unde, în vid, este egală cu viteza luminii (în vid).

Dacă fenomenul ondulatoriu se propagă în direcția axei  $Ox$  și admitem  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x, t)$ , ecuația lui D'Alembert (4.3) se va scrie

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x^2} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2} = 0. \quad (4.5)$$

Pentru a integra această ecuație, vom efectua substituția

$$\xi = x - ut ; \quad \eta = x + ut,$$

cu ajutorul căreia din (4.5) rezultă după calcule simple

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

iar prin integrare

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \xi} = \mathbf{F}(\xi) ; \quad \mathbf{f} = \int \mathbf{F}(\xi) d\xi + \mathbf{g}_2(\eta),$$

sau

$$\mathbf{f}(x, t) = \mathbf{g}_1(\xi) + \mathbf{g}_2(\eta) = \mathbf{g}_1(x - ut) + \mathbf{g}_2(x + ut), \quad (4.6)$$

în care  $\mathbf{g}_1(x - ut)$  și  $\mathbf{g}_2(x + ut)$  sunt două funcții arbitrare de variabilele indicate. Soluția  $\mathbf{g}_1$  ne dă o undă în direcția și sensul pozitiv al axei  $Ox$ , iar  $\mathbf{g}_2$  o undă în direcția și sensul negativ al axei  $Ox$ . Prima corespunde

unei unde *progresive*, iar cea de a doua unei unde *regresive*. Mai putem scrie:

$$\mathbf{f}(x, t) = \mathbf{f}_1\left(t - \frac{x}{u}\right) + \mathbf{f}_2\left(t + \frac{x}{u}\right). \quad (4.6')$$

În problemele de propagare a undelor se utilizează aproape exclusiv unda progresivă, care se alege de forma

$$\mathbf{f}'(x, t) = \mathbf{f}_o \cos \omega\left(t - \frac{x}{u}\right) = \mathbf{f}_o \cos(\omega t - kx), \quad (4.7)$$

unde  $\mathbf{f}_o$  este *amplitudinea* undei (reală sau complexă),  $k = 2\pi/\lambda$  este *numărul de undă*,  $\lambda$  este *lungimea de undă*, iar argumentul  $\omega t - kx$  al funcției trigonometrice se numește *faza undei*.

Se observă că expresia

$$\mathbf{f}''(x, t) = \mathbf{f}_o \sin(\omega t - kx) \quad (4.8)$$

este de asemenea o soluție a ecuației undelor (4.5). Utilizând principiul superpoziției, o soluție a acestei ecuații va fi și combinația

$$\mathbf{f}(x, t) = \mathbf{f}_o [\cos(\omega t - kx) + i \sin(\omega t - kx)] = \mathbf{f}_o e^{i(\omega t - kx)}. \quad (4.9)$$

Dacă unda se propagă într-o direcție oarecare, caracterizată prin versorul  $\mathbf{s}(\alpha, \beta, \gamma)$ , unde  $\alpha, \beta, \gamma$  sunt cosinusurile directe ale normalei la frontul de undă, atunci *vectorul de undă* va fi

$$\mathbf{k} = k \mathbf{s} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{s}, \quad (4.10)$$

iar (4.9) se va scrie sub forma generală

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{f}_o e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}. \quad (4.11)$$

Expresia (4.11) este *ecuația finită a undei monocromatice plane*. Se numește *monocromatică* deoarece se presupune că frecvența nu se modifică în decursul propagării, iar denumirea de *plană* vine de la faptul că în fiecare moment suprafețele de egală fază au forma plană. Într-a-

devăr, locul geometric al punctelor în care, la un moment dat ( $t = \text{const.}$ ), soluția  $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$  are aceeași valoare, se obțin din relația

$$\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y + \gamma z) = \text{const.}, \quad (4.12)$$

care este ecuația unui plan, numit *planul de fază* al unde.

În concluzie, soluțiile (ecuațiile finite) ale ecuațiilor (cu derivate parțiale) de propagare (4.2) sunt de forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_o e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} ; \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_o e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (4.13)$$

și reprezintă *unde electromagnetice plane monocromatice*. Aici amplitudinile  $\mathbf{E}_o$  și  $\mathbf{H}_o$  pot fi reale sau complexe.

### Unde sferice

Una dintre caracteristicile unei unde se referă la forma frontului de undă (a suprafeței de egală fază). După acest criteriu, undele pot fi: plane, sferice, cilindrice etc. O sursă punctiformă emite în general, într-un mediu omogen și izotrop, *unde sferice*. Desigur, frontul de undă al unei surse punctiforme va avea o anumită curbura în apropierea sursei (de ex. 100 m) și o cu totul altă curbura (apropiată de zero) la distanță mare (de ex. 1000 km) de aceasta. Cum undele sferice ocupă un loc important în studiul teoretic și practic al propagării undelor în diverse medii, ne propunem să determinăm ecuațiile finite ale unei astfel de unde.

Vom pleca, după cum am procedat și în cazul precedent, de la ecuația de propagare de tip D'Alembert (4.3) în care, de data aceasta, laplaceanul  $\Delta$  — ținându-se seama de simetria sferică prezentată de problemă — va trebui exprimat în coordonate sferice. Admițând unda monocromatică, vom alege soluția de forma

$$\mathbf{f}(r, t) = \mathbf{f}_o \phi(r) e^{i\omega t}.$$

Înlocuind în ecuația undelor (4.3), avem:

$$\Delta \mathbf{f} = \mathbf{f}_o e^{i\omega t} \Delta \phi(r) ; \quad -\frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{u^2} \mathbf{f}_o \phi(r) e^{i\omega t},$$

prin urmare

$$\Delta\phi + \frac{\omega^2}{u^2}\phi = 0,$$

sau

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\phi}{dr} + k^2\phi = 0, \quad (4.14)$$

unde

$$k = \frac{\omega}{u} = \frac{2\pi\nu}{\lambda\nu} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (4.15)$$

este numărul de undă.

Efectuând substituția  $\phi = \psi/r$ , obținem ecuația

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + k^2\psi = 0,$$

cu soluția (pentru unda progresivă)  $\psi = A e^{-ikr}$ , deci

$$\phi(r) = \frac{A}{r} e^{-ikr}$$

și

$$\mathbf{f}(r, t) = \frac{1}{r} \mathbf{f}_o e^{(\omega t - kr)}. \quad (4.16)$$

Se observă cu ușurință că suprafețele de egală fază se vor exprima prin  $r = \text{const.}$ , ceea ce geometric reprezintă un sistem de sfere concentrice, cu centrul comun în sursa radiantă punctiformă.

Așadar, o undă electromagnetică sferică, monocromatică, se va exprima prin relațiile

$$\mathbf{E}(r, t) = \frac{1}{r} \mathbf{X}_o e^{(\omega t - kr)} ; \quad \mathbf{H}(r, t) = \frac{1}{r} \mathbf{Y}_o e^{(\omega t - kr)}. \quad (4.17)$$

Atragem atenția asupra faptului că, de data aceasta, amplitudinile  $\mathbf{X}_o$  și  $\mathbf{Y}_o$  nu se măsoară în unități ce câmp (V/m).

### Transversalitatea undelor electromagnetice

Considerăm o undă electromagnetică plană, dată prin ecuațiile finite (4.13). Înlocuind în ecuațiile lui Maxwell (4.1')<sub>2,4</sub>, avem :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E}_o \cdot \nabla e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = -i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_o e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = -i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 ;$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \mathbf{H}_o \cdot \nabla e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = -i\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_o e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = -i\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0 , \quad (4.18)$$

de unde rezultă că vectorii  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{H}$  sunt *ortogonali la direcția de propagare a undeii*. Înlocuind (4.13) în celelalte ecuații ale lui Maxwell (4.1'), obținem

$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \times \mathbf{E}_o = -\mu \mathbf{H}_o \frac{\partial}{\partial t} \left[ e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \right],$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \times \mathbf{H}_o = \epsilon \mathbf{E}_o \frac{\partial}{\partial t} \left[ e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \right].$$

Efectuând calculele și având în vedere că

$$\frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}},$$

găsim

$$\mathbf{E} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} (\mathbf{H} \times \mathbf{s}) ; \quad \mathbf{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (\mathbf{s} \times \mathbf{E}). \quad (4.19)$$

Constatăm, între altele, că cele două relații (4.19) sunt echivalente. Înmulțind scalar (4.19)<sub>1</sub> cu  $\mathbf{H}$ , sau (4.19)<sub>2</sub> cu  $\mathbf{E}$ , obținem

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (4.20)$$

ceea ce exprimă faptul că vectorii  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{H}$  sunt *reciproc ortogonali*.

Coroborând rezultatele obținute, ajungem la concluzia că vectorii  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{s}$  formează un triedru ortogonal drept, prin urmare, în dielectrici omogeni și izotropi, câmpul electromagnetic se propagă sub formă de *unde transversale*.

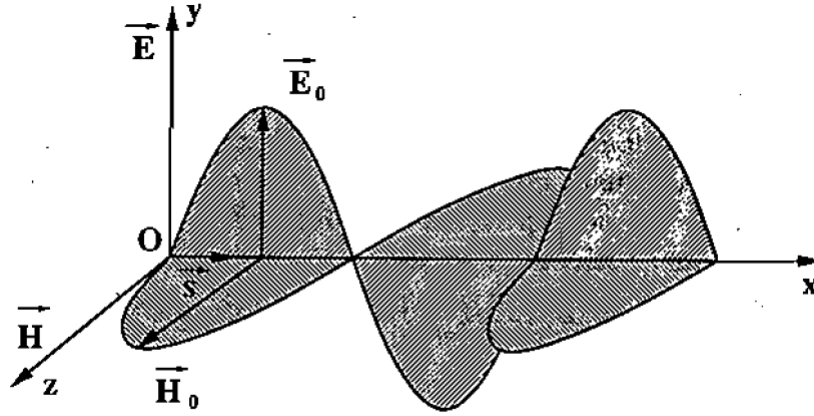


Modulul vectorilor  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{H}$  se obține din (4.19):

$$|\mathbf{E}| = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} |\mathbf{H}| ; \quad |\mathbf{H}| = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\mathbf{E}|, \quad (4.19')$$

cu alte cuvinte mărimile vectorilor  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{H}$  sunt *proporționale*. Aceasta se datorează faptului că cei doi vectori sunt *în fază*, adică oscilează *sincron*.

Alegând planul  $xOy$  ca plan de oscilație pentru vectorul  $\mathbf{E}$  și planul  $zOx$  ca plan de oscilație pentru vectorul  $\mathbf{H}$ , o undă electromagnetică plană progresivă se poate reprezenta grafic așa cum este indicat în Fig.4.1.



**Fig. 4.1.**

Elementele cu care am făcut cunoștință până acum ne permit să calculăm unele mărimi caracteristice câmpului electromagnetic în dielectrici. De pildă, *energia* purtată de unda electromagnetică se va repartiza în mod egal pe cele două componente, electrică și magnetică, deoarece

$$\epsilon E^2 = \mu H^2, \quad \text{deci} \quad w_{em} = 2w_e = 2w_m, \quad (4.21)$$

unde  $w_{em}$  este densitatea de energie a câmpului electromagnetic în vid.

*Vectorul lui Poynting* va fi

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = EH\mathbf{s}; \quad |\mathbf{\Pi}| = EH = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E^2 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H^2, \quad (4.22)$$

iar *densitatea de impuls* a câmpului electromagnetic se va exprima prin

$$\mathbf{p}_{em} = \epsilon\mu(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \epsilon\mu\mathbf{\Pi} ;$$

$$|\mathbf{p}_{em}| = \epsilon\sqrt{\epsilon\mu} E^2 = \mu\sqrt{\epsilon\mu} H^2 = \sqrt{\epsilon\mu} w_{em}. \quad (4.23)$$

În vid  $\sqrt{\epsilon_o\mu_o} = 1/c$ , deci

$$|\mathbf{p}_{em}| = \frac{1}{c}w_{em}. \quad (4.23')$$

### Teoria electromagnetică a luminii

În anul 1865 Maxwell constată că între undele electromagnetice – prezise de teoria sa – și undele luminoase există o analogie perfectă. Această analogie se baza pe următoarele elemente :

- a) Ambele tipuri de unde sunt transversale;
- b) Satisfac ecuații de tip D'Alembert omogene;
- c) Au, în vid, aceeași viteză de propagare.

După cum se știe, raportul dintre viteza luminii în vid și viteza de fază a luminii într-un mediu transparent definește *indicele de refracție*  $n$  al acelui mediu. Potrivit teoriei lui Maxwell, trebuie să avem (vezi 4.4)

$$n = \frac{c}{u} = \sqrt{\epsilon_r\mu_r}, \quad (4.24)$$

care constituie *relația lui Maxwell*. Alegând medii transparente, cu  $\mu_r \simeq 1$ , din (4.24) rezultă

$$n = \sqrt{\epsilon_r}. \quad (4.25)$$

Această relație se verifică experimental pentru gaze, cristale transparente (Boltzmann) și anumite lichide (toluen, benzen - Dimitrie Negreanu). Există, însă, unele neconcordanțe considerabile între teoria lui Maxwell și experiment. De pildă, în cazul apei avem:

$$n_{teor} = \sqrt{\epsilon_r} = \sqrt{81} = 9 ;$$

$$n_{exper} = 1,3.$$

Aceste abateri provin din aceea că teoria lui Maxwell nu ține seama de fenomenul de *dispersie*, deci de variația lui  $\epsilon_r, \mu_r$  (și, implicit, a lui  $n$ ) cu frecvența radiației incidente. Explicația modului în care permitivitatea și permeabilitatea mediului variază cu frecvența nu putea fi dată decât ținând seama de structura discontinuă, electronică a substanței. O astfel de teorie a fost dată de Lorentz.

Deși incompletă, teoria lui Maxwell are marele merit de a fi realizat, prin prevederea existenței undelor electromagnetice, o unificare a fenomenelor electromagnetice și cele optice, considerate multă vreme ca independente.

### Problemă

Fie dat potențialul vector  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$  și condițiile  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ,  $\mathbf{j} = 0$ ,  $\rho = 0$ .

a) Utilizând relațiile dintre câmp și potențiale, să se dovedească transversalitatea undelor electromagnetice într-un mediu omogen și izotrop.

b) Să se determine modulul și direcția vectorului lui Poynting.

## §4.3. Polarizarea undelor electromagnetice

### Considerații generale

Fie  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  vectorul prin care se definește o undă orientată. În coordonate carteziane ortogonale, acesta se scrie

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k} = \mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y + \mathbf{u}_z.$$

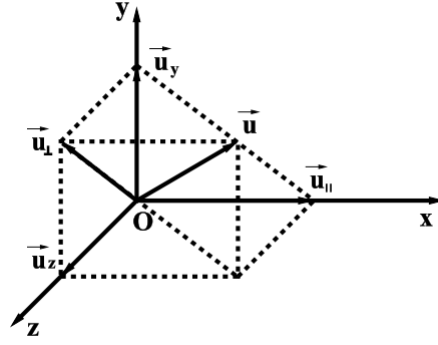
Dacă alegem  $Ox$  ca direcție de propagare a undei, din Fig.4.2 se vede că putem scrie

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_\perp(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}_\parallel(\mathbf{r}, t), \quad (4.26)$$

unde  $\mathbf{u}_\perp = \mathbf{u}_y + \mathbf{u}_z$  este perpendicular pe direcția de propagare, iar  $\mathbf{u}_\parallel = \mathbf{u}_x$  este paralel cu această direcție.

Direcția definită de  $\mathbf{u}_\perp$  se numește *direcție de polarizare*, iar planul definit de  $\mathbf{u}_\perp$  și direcția de propagare a undei este *planul de polarizare*.

Planul ce conține  $\mathbf{u}_\perp$  și este perpendicular pe direcția de propagare (deci pe planul de polarizare) se numește *plan de oscilație*.



**Fig. 4.2.**

Polarizarea unei unde transversale poate fi:

1. **Liniară**, dacă oscilațiile vectorului  $\mathbf{u}_\perp$  au loc după o direcție fixă. În acest caz extremitatea vectorului  $\mathbf{u}_\perp$  descrie o dreaptă.

2. **Plană**, dacă  $\mathbf{u}_\perp$  descrie o curbă în planul de oscilație. După felul curbei descrise de  $\mathbf{u}_\perp$ , polarizarea plană poate fi:

- a) eliptică (dreapta sau stânga) ;
- b) circulară (dreapta sau stânga), ca un caz particular al polarizării eliptice.

În anumite condiții, polarizarea eliptică poate trece în polarizare liniară.

Să scoatem în relief unele caracteristici ale polarizării eliptice. Fie  $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_z$  versorii axelor  $Oy$ , respectiv  $Oz$ . Avem :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\perp(x, t) &= \mathbf{e}_y u_y(x, t) + \mathbf{e}_z u_z(x, t) = \\ &= \mathbf{e}_y u_{oy} e^{i\alpha} e^{i(\omega t - kx)} + \mathbf{e}_z u_{oz} e^{i\beta} e^{i(\omega t - kx)}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

unde  $u_{oy}$ ,  $u_{oz}$  sunt amplitudini reale, iar  $\alpha$  și  $\beta$  defazajele celor două componente. Notând  $A = \omega t - kx$ , vom scrie partea reală a componentelor după  $Oy$  și  $Oz$  sub forma

$$\text{Re } u_y = u_{oy} \cos(A + \alpha) ; \quad \text{Re } u_z = u_{oz} \cos(A + \beta).$$

Dezvoltând funcțiile trigonometrice și notând  $\phi = \cos A$ , avem

$$\frac{Re\ u_y}{u_{oy}} = \phi \cos \alpha - \sqrt{1 - \phi^2} \sin \alpha ;$$

$$\frac{Re\ u_z}{u_{oz}} = \phi \cos \beta - \sqrt{1 - \phi^2} \sin \beta.$$

Din aceste relații determinăm  $\phi$  și  $\sqrt{1 - \phi^2}$  :

$$\phi = \frac{\frac{Re\ u_y}{u_{oy}} \sin \beta - \frac{Re\ u_z}{u_{oz}} \sin \alpha}{\sin \theta} ;$$

$$\sqrt{1 - \phi^2} = \frac{\frac{Re\ u_y}{u_{oy}} \cos \beta - \frac{Re\ u_z}{u_{oz}} \cos \alpha}{\sin \theta},$$

unde  $\theta = \beta - \alpha$ . Ridicând la pătrat și adunând, obținem

$$\left( \frac{Re\ u_y}{u_{oy}} \right)^2 + \left( \frac{Re\ u_z}{u_{oz}} \right)^2 - 2 \frac{(Re\ u_y)(Re\ u_z)}{u_{oy}u_{oz}} \cos \theta = \sin^2 \theta.$$

Aceasta este ecuația unei elipse, ale cărei axe sunt rotite față de axele  $Oy$ ,  $Oz$  cu un unghi  $\gamma$  și care este înscrisă într-un dreptunghi de laturi  $2u_{oy}$ ,  $2u_{oz}$ . Excentricitatea, direcția axelor elipsei și sensul în care este parcursă elipsa depind de valoarea defazajului. Există următoarele posibilități:

1°.  $0 < \theta < \pi$ . Elipsa este parcursă în sens invers acelor de ceasornic (polarizare eliptică stânga sau helicitate pozitivă).

2°.  $\pi < \theta < 2\pi$ . Elipsa este parcursă în sensul acelor de ceasornic (polarizare eliptică dreapta sau helicitate negativă).

3°.  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ ;  $u_{oy} = u_{oz} = u_o$ . Elipsa devine un cerc, înscris într-un pătrat de latură  $2u_o$  (polarizare circulară stânga, respectiv dreapta).

4°.  $\theta = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$ . Axele elipsei (cercului) coincid cu axele de coordonate.

5°.  $\theta = n\pi$ . Elipsa (cercul) degenerază într-o dreaptă și polarizarea devine liniară. De exemplu, dacă  $\theta = 0$  sau  $\pi$ , avem dreptele  $Re\ u_y = \pm \frac{u_{oy}}{u_{oz}} (Re\ u_z)$ .

Dacă pulsațiile celor două componente  $u_y$ ,  $u_z$  sunt diferite, vectorul  $u_{\perp}$  descrie niște curbe mai complicate, numite *figuri Lissajous*.

### Polarizarea undelor electromagnetice

Considerăm o undă monocromatică plană de forma (4.13) care se propagă într-un mediu omogen și izotrop, în direcția definită de vectorul  $\mathbf{k} = k\mathbf{s}$ . Transversalitatea undei, exprimată sintetic prin relația (vezi 4.19)

$$\mathbf{B} = \sqrt{\epsilon\mu} \mathbf{s} \times \mathbf{E},$$

sugerează introducerea unui set de trei versori reciproc ortogonali  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{s}$ , cu ajutorul cărora amplitudinile  $\mathbf{E}_o, \mathbf{B}_o$  se exprimă prin

$$\mathbf{E}_o = \mathbf{e}_1 E_{o1} ; \quad \mathbf{B}_o = \mathbf{e}_2 \sqrt{\epsilon\mu} E_{o1} \quad (4.28')$$

sau prin

$$\mathbf{E}_o = \mathbf{e}_2 E_{o2} ; \quad \mathbf{B}_o = -\mathbf{e}_1 \sqrt{\epsilon\mu} E_{o2}. \quad (4.28'')$$

Unda descrisă de (4.13) și (4.28') are vectorul  $\mathbf{E}$  mereu în direcția  $\mathbf{e}_1$ , iar cea descrisă de (4.13) și (4.28'') are vectorul  $\mathbf{E}$  mereu în direcția  $\mathbf{e}_2$ . Prima este polarizată *liniar* în direcția  $\mathbf{e}_1$ , iar cea de a doua în direcția  $\mathbf{e}_2$ . Cele două unde se pot combina, pentru a exprima o undă plană ce se propagă în direcția  $\mathbf{k} = k\mathbf{s}$ , sub cea mai generală formă :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{e}_1 E_{o1} + \mathbf{e}_2 E_{o2}) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}. \quad (4.29)$$

Amplitudinile  $E_{o1}, E_{o2}$  sunt, în general, complexe :

$$E_{o1} = |E_{o1}| e^{i\alpha} ; \quad E_{o2} = |E_{o2}| e^{i\beta}.$$

Dacă  $E_{o1}, E_{o2}$  au aceeași fază, relația (4.29) descrie o undă polarizată *liniar*, vectorul de polarizare făcând cu  $\mathbf{e}_1$  unghiul

$$\theta = \arctg \frac{E_{o2}}{E_{o1}}$$

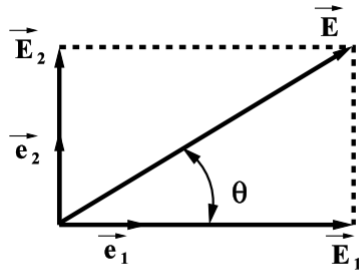
și având modulul  $E_o = \sqrt{E_{o1}^2 + E_{o2}^2}$  (vezi Fig. 4.3). Dacă  $E_1$  și  $E_2$  au faze diferite, unda (4.29) este polarizată *eliptic*. În particular, dacă  $|E_{o1}| = |E_{o2}| = E_o$  (real) și diferența de fază este  $\pi/2$ , din (4.29) avem

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2) E_o e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}.$$

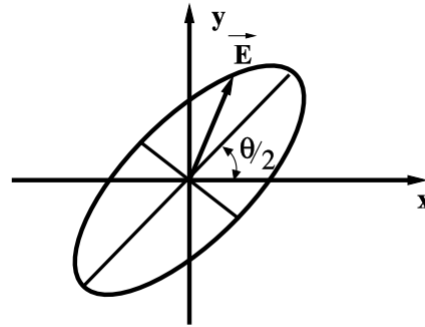
Dacă orientăm versorii  $\mathbf{e}_1$  și  $\mathbf{e}_2$  în direcția axelor  $Ox$ , respectiv  $Oy$ , părțile reale ale componentelor câmpului  $\mathbf{E}$  vor fi

$$E_x(\mathbf{r}, t) = E_o \cos(\omega t - kz) ; \quad E_y(\mathbf{r}, t) = \mp E_o \sin(\omega t - kz). \quad (4.30)$$

Într-un punct fix din spațiu, câmpul dat de (4.30) este astfel încât vectorul  $\mathbf{E}$  este constant în modul, iar extremitatea sa descrie un cerc cu pulsația  $\omega$  în planul  $xOy$ . În cazul  $\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2$ , un observator ce "vede" unda venind spre el constată rotația lui  $\mathbf{E}$  în sensul contrar acelor de ceasornic (polarizare circulară stânga sau helicitate pozitivă), iar în cazul  $\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2$ , rotația lui  $\mathbf{E}$  este în sensul acelor de ceasornic (polarizare circulară dreapta sau helicitate negativă).



**Fig. 4.3.**



**Fig. 4.4.**

Să introducem vectorii unitari ortogonali

$$\mathbf{e}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2),$$

cu proprietățile

$$\mathbf{e}_{\pm}^* \cdot \mathbf{e}_{\pm} = 1 ; \quad \mathbf{e}_{\pm}^* \cdot \mathbf{e}_{\mp} = 0 ; \quad \mathbf{e}_{\pm}^* \cdot \mathbf{k} = 0.$$

Reprezentarea (4.29) este atunci echivalentă cu

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (E_{o+}\mathbf{e}_+ + E_{o-}\mathbf{e}_-) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad (4.31)$$

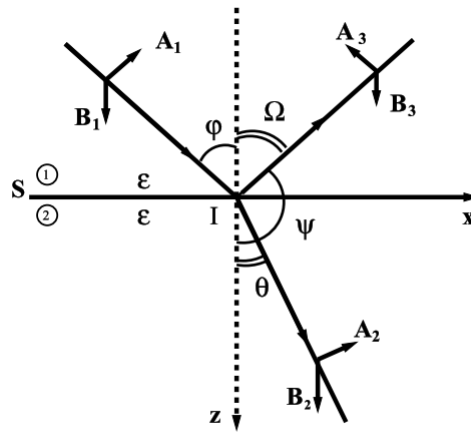
unde  $E_+$  și  $E_-$  sunt amplitudini complexe. Dacă  $E_{o+}$  și  $E_{o-}$  au module diferite dar aceeași fază, (4.31) reprezintă o *undă polarizată eliptic* cu axele principale ale elipsei în direcțiile lui  $\mathbf{e}_1$  și  $\mathbf{e}_2$ . Notând  $E_-/E_+ = r$ , raportul dintre semiaxa mare și cea mică ale elipsei va fi

$$\left| \frac{(1+r)}{(1-r)} \right|.$$

Dacă între amplitudini există o diferență de fază, adică  $E_-/E_+ = r e^{-\theta}$ , atunci elipsa descrisă de vectorul  $\mathbf{E}$  are axele rotite de un unghi  $\theta/2$  (Fig.4.4). Pentru  $r = 1$ , regăsim cazul polarizării liniare.

#### §4.4. Reflexia și refracția undelor electromagnetice plane la suprafața de separație dintre două medii dielectrice

Considerăm două medii dielectrice diferite, omogene și izotrope, transparente, caracterizate prin permitivitățile  $\epsilon_1$  și  $\epsilon_2$  ( $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ ) și permeabilitățile  $\mu_1 = \mu_2$ , separate prin suprafața plană  $S$  (Fig. 4.5).



**Fig. 4.5.**

Experimentul arată că o undă incidentă, reprezentată prin raza  $SI$ , se reflectă și se refractă parțial în punctul  $I$ . Pentru a distinge



razele incidentă, reflectată și refractată, le vom atribui câte un indice : 1 - pentru raza incidentă, 2 - pentru raza refractată și 3 - pentru cea reflectată.

Vom presupune cunoscut câmpul  $\mathbf{E}_1$ , a cărui amplitudine  $\mathbf{E}_{o1}$  are componentele :  $B_1$  pe axa Oy și  $A_1$ , perpendiculară pe raza incidentă și situată în planul  $zOx$ . Aceeași semnificație o au amplitudinile  $A_2$ ,  $B_2$  pentru unda refractată, respectiv  $A_3$ ,  $B_3$  pentru cea reflectată. Admițând că unda incidentă este plană și monocromatică, vom putea scrie câmpul  $\mathbf{E}_1$  sub forma

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{o1} e^{i(\omega t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})} = \mathbf{E}_{o1} e^{i\omega \left( t - \frac{\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r}}{u_1} \right)}. \quad (4.32)$$

Fie

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1(X_1, Y_1, Z_1),$$

$$\mathbf{E}_{o1} = \mathbf{E}_{o1}(A_1 \cos \phi, B_1, -A_1 \sin \phi), \quad \mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_1(l_1, m_1, n_1),$$

unde în paranteze am indicat componentele vectorilor după axele de coordonate. Observând că

$$l_1 = \sin \phi ; \quad m_1 = 0 ; \quad n_1 = \cos \phi ;$$

$$u_1 = u_3 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}} ; \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}},$$

putem scrie

$$X_1 = A_1 \cos \phi e^{i\omega [t - \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} (x \sin \phi + z \cos \phi)]}.$$

Notând cu  $\eta_1$  partea periodică a unei incidente și exprimând celelalte două componente ale câmpului  $\mathbf{E}_1$ , avem în sumar

$$\mathbf{E}_1 \begin{cases} X_1 = A_1 \cos \phi \eta_1 ; \\ Y_1 = B_1 \eta_1 ; \\ Z_1 = -A_1 \sin \phi \eta_1 . \end{cases} \quad (4.33)$$

Fie  $\mathbf{B}_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$  vectorul inducție magnetică în unda incidentă. Utilizând relațiile (4.19), avem

$$\mathbf{B}_1 = \mu_1 \mathbf{H}_1 = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \mathbf{s}_1 \times \mathbf{E}_1. \quad (4.34)$$

Componenta după axa  $Ox$  a acestei relații va fi

$$\begin{aligned} B_{1x} = \alpha_1 &= \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} (s_{1y} E_{1z} - s_{1z} E_{1y}) = \\ &= -\sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \cos \phi \eta_1. \end{aligned}$$

Calculând și celelalte componente și grupând termenii, avem

$$\mathbf{B}_1 \begin{cases} \alpha_1 = -\sqrt{\epsilon_1 \mu_1} B_1 \cos \phi \eta_1 ; \\ \beta_1 = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} A_1 \eta_1 ; \\ \gamma_1 = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} B_1 \sin \phi \eta_1 . \end{cases} \quad (4.35)$$

În mod similar găsim pentru unda reflectată :

$$\mathbf{E}_3 \begin{cases} X_3 = A_3 \cos \psi \eta_3 ; \\ Y_3 = B_3 \eta_3 ; \\ Z_3 = -A_3 \sin \psi \eta_3 . \end{cases} \quad \mathbf{B}_3 \begin{cases} \alpha_3 = -\sqrt{\epsilon_1 \mu_1} B_3 \cos \psi \eta_3 ; \\ \beta_3 = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} A_3 \eta_3 ; \\ \gamma_3 = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} B_3 \sin \psi \eta_3 , \end{cases} \quad (4.36)$$

iar pentru unda refractată

$$\mathbf{E}_2 \begin{cases} X_2 = A_2 \cos \theta \eta_2 ; \\ Y_2 = B_2 \eta_2 ; \\ Z_2 = -A_2 \sin \theta \eta_2 , \end{cases} \quad \mathbf{B}_2 \begin{cases} \alpha_2 = -\sqrt{\epsilon_2 \mu_2} B_2 \cos \theta \eta_2 ; \\ \beta_2 = \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} A_2 \eta_2 ; \\ \gamma_2 = \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} B_2 \sin \theta \eta_2 . \end{cases} \quad (4.37)$$

### Legile reflexiei și refracției undelor electromagnetice

Să stabilim relațiile ce există între unghiurile  $\phi$ ,  $\Omega$ ,  $\theta$  și  $\psi$  indicate în Fig.4.5. În acest scop vom utiliza condițiile la limită : pe suprafața (plană) de separație ( $z = 0$ ), fazele undelor incidentă, refractată și reflectată trebuie să fie egale

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3,$$

adică, având în vedere că  $\mu_1 = \mu_2$ ,

$$\sqrt{\epsilon_1} \sin \phi = \sqrt{\epsilon_2} \sin \theta = \sqrt{\epsilon_1} \sin \psi. \quad (4.38)$$

De aici deducem :

1°.  $\sin \phi = \sin \psi = \sin(\pi - \Omega) = \sin \Omega$ , deci

$$\phi = \Omega, \quad (4.39)$$

adică *egalitatea* unghiurilor de incidență și reflexie.

2°. *Prin definiție*,  $n_2/n_1 = n_{21}$  este indicele de refracție *relativ* al mediului 2 față de mediul 1. Ținând seama de relația lui Maxwell (4.24), avem atunci

$$\frac{\sin \phi}{\sin \theta} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}, \quad (4.40)$$

cunoscută sub numele de *legea Snellius-Descartes*. Să luăm în considerație următoarele două cazuri :

a)  $\epsilon_2 > \epsilon_1$ . De aici rezultă  $\sin \phi > \sin \theta$ . Cum  $0 \leq \phi, \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , iar funcția *sinus* este monoton crescătoare, conchidem că la trecerea într-un mediu mai refringent ( $n_{21} > 1$ ) unda refractată se *apropie* de normală.

b)  $\epsilon_2 < \epsilon_1$ . Aceasta implică  $\sin \phi < \sin \theta$ , deci  $\phi < \theta$ , adică la trecerea într-un mediu mai puțin refringent ( $n_{21} < 1$ ) raza refractată se îndepărtează de normală.

Există o anumită valoare a unghiului de incidență, notată  $\phi_l$  și numită *unghi limită de incidență*, pentru care  $\theta = \theta_l = \frac{\pi}{2}$ . Din (4.40) deducem atunci

$$\sin \phi_l = n_{21} \sin \theta_l = n_{21} < 1.$$

Pentru  $\phi > \phi_l$ , ar trebui să avem  $\sin \theta > \sin \theta_l$ , pentru ca raportul  $n_{21}$  să rămână constant. În realitate,  $\sin \theta$  ( $\theta > \frac{\pi}{2}$ ) scade odată cu creșterea lui  $\phi$ . Cum așa ceva nu este posibil, conchidem că pentru  $\phi > \phi_l$  nu avem refracție, unda incidentă suferind fenomenul de *reflexie totală*.

### Formulele lui Fresnel

Formulele (4.33) - (4.37) ne permit să găsim niște relații între amplitudinile undelor refractată și reflectată, pe de o parte, și amplitudinea unei incidente, pe de alta. În acest scop, apelăm la condițiile la limită : pe suprafața de separație ( $z = 0$ ), componentele normale și tangențiale ale câmpurilor  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{H}$  vor satisface ecuațiile de trecere (3.40). Întrucât

pe suprafața plană  $S$  nu avem surse ( $\mathbf{j}|_S = 0$ ,  $\rho|_S = 0$ ), aceste ecuații se vor scrie

$$\begin{aligned} D_{2n} - D_{1n} &= 0 ; & B_{2n} - B_{1n} &= 0 ; \\ E_{2T} - E_{1T} &= 0 ; & H_{2T} - H_{1T} &= 0 . \end{aligned}$$

În cazul nostru, se observă că atât  $\mathbf{E}$  cât și  $\mathbf{H}$  au câte două componente tangențiale (după direcțiile  $Ox$  și  $Oy$ ) și una normală (după direcția  $Oz$ ), iar  $\mu_1 = \mu_2$ , prin urmare

$$\mathbf{E} \begin{cases} E_{1T} + E_{3T} = E_{2T} ; \\ \epsilon_1(E_{1n} + E_{3n}) = \epsilon_2 E_{2n} , \end{cases} \quad \mathbf{H} \begin{cases} H_{1T} + H_{3T} = H_{2T} ; \\ H_{1n} + H_{3n} = H_{2n} . \end{cases}$$

Pe suprafața de separație fazele fiind egale ( $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3$ ), putem scrie

$$\begin{cases} X_1 + X_3 = X_2 ; \\ Y_1 + Y_3 = Y_2 ; \\ \epsilon_1(Z_1 + Z_3) = \epsilon_2 Z_2 , \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_2 ; \\ \beta_1 + \beta_3 = \beta_2 ; \\ \gamma_1 + \gamma_3 = \gamma_2 , \end{cases}$$

sau, dacă utilizăm (4.33) - (4.37),

$$\mathbf{E} \begin{cases} A_1 \cos \phi + A_3 \cos \psi = A_2 \cos \theta ; \\ B_1 + B_3 = B_2 ; \\ \epsilon_1(A_1 \sin \phi + A_3 \sin \psi) = \epsilon_2 A_2 \sin \theta , \end{cases} \quad (4.41)$$

$$\mathbf{H} \begin{cases} B_1 \sqrt{\epsilon_1} \cos \phi + B_3 \sqrt{\epsilon_1} \cos \psi = B_2 \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta ; \\ A_1 \sqrt{\epsilon_1} + A_3 \sqrt{\epsilon_1} = A_2 \sqrt{\epsilon_2} ; \\ B_1 \sqrt{\epsilon_1} \sin \phi + B_3 \sqrt{\epsilon_1} \sin \psi = B_2 \sqrt{\epsilon_2} \sin \theta . \end{cases}$$

Din cele 6 ecuații (4.41) doar 4 sunt independente căci, potrivit relațiilor (4.38), (4.41)<sub>6</sub> se reduce la (4.41)<sub>2</sub>, iar (4.41)<sub>3</sub> se reduce la (4.41)<sub>5</sub>. Rămâne, așadar, sistemul de 4 ecuații

$$\begin{aligned} (A_1 - A_3) \cos \phi &= A_2 \cos \theta ; \\ B_1 + B_3 &= B_2 ; \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\sqrt{\epsilon_1} (B_1 - B_3) \cos \phi = \sqrt{\epsilon_2} B_2 \cos \theta ;$$

$$\sqrt{\epsilon_1} (A_1 + A_3) = \sqrt{\epsilon_2} A_2,$$

din care determinăm  $A_2, B_2, A_3, B_3$  în funcție de  $A_1, B_1$ , admitând că se cunosc unghiurile  $\phi, \theta$  și permitivitățile  $\epsilon_1, \epsilon_2$  :

$$A_2 = A_1 \frac{2\sqrt{\epsilon_1} \cos \phi}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta + \sqrt{\epsilon_2} \cos \phi} ; \quad B_2 = B_1 \frac{2\sqrt{\epsilon_1} \cos \phi}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \phi + \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta} ;$$

(4.43)

$$A_3 = A_1 \frac{\sqrt{\epsilon_2} \cos \phi - \sqrt{\epsilon_1} \cos \theta}{\sqrt{\epsilon_2} \cos \phi + \sqrt{\epsilon_1} \cos \theta} ; \quad B_3 = B_1 \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos \phi - \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \phi + \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta}.$$

Aceste relații au fost deduse de Fresnel în 1823 și se numesc *formulele lui Fresnel*.

Utilizând legea refracției  $\sqrt{\epsilon_1} \sin \phi = \sqrt{\epsilon_2} \sin \theta$ , putem scrie formulele (4.43) sub o formă în care să nu mai figureze  $\epsilon_1, \epsilon_2$ . După calcule simple, se obține

$$A_2 = A_1 \frac{2 \sin \theta \cos \phi}{\sin(\phi + \theta) \cos(\phi - \theta)} ;$$

$$B_2 = B_1 \frac{2 \sin \theta \cos \phi}{\sin(\phi + \theta)} ;$$

$$A_3 = A_1 \frac{\operatorname{tg}(\phi - \theta)}{\operatorname{tg}(\phi + \theta)} ;$$

$$B_3 = - B_1 \frac{\sin(\phi - \theta)}{\sin(\phi + \theta)} .$$

(4.44)

Să luăm în discuție următoarele cazuri:

a) Dacă  $B_1 \neq 0$ ,  $\phi \neq 0$ , rezultă  $B_3 \neq 0$ . În particular, cazul  $\phi = 0$  (incidență normală) atrage după sine  $\theta = 0$  și din (4.43)<sub>4</sub> rezultă, pentru  $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$  :

$$B_3 = B_1 \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}} \neq 0,$$

prin urmare componenta perpendiculară pe planul de incidență a undei reflectate nu dispare niciodată. Altfel spus, prin reflexie o undă electromagnetică nu se poate polariza niciodată perpendicular la planul de incidență. Avem, în general, o *polarizare parțială în planul de incidență*.

b) Pe măsură ce  $\phi$  crește (începând de la zero), amplitudinea  $A_3$  scade, după cum rezultă din (4.44)<sub>3</sub>. Există un anumit unghi de incidență  $\phi = \phi_B$ , pentru care  $\phi + \theta = \pi/2$ . În acest caz  $A_3 = 0$ , căci  $\tan \pi/2 = \infty$ , deci în unda reflectată rămâne numai  $B_3 \neq 0$ , care oscilează perpendicular pe planul de incidență. Unda reflectată este așadar polarizată *liniar, total, în planul de incidență*. Unghiul  $\phi_B$  corespunzător unei astfel de polarizări se numește *unghi de incidență brewsteriană*.

c) Să scriem raportul  $B_3/A_3$ . Din (4.44)<sub>3,4</sub> deducem

$$\frac{B_3}{A_3} = - \frac{B_1}{A_1} \frac{\cos(\phi - \theta)}{\cos(\phi + \theta)}.$$

Alegând  $0 < \theta < \phi < \pi/2$ , avem

$$\left| \frac{\cos(\phi - \theta)}{\cos(\phi + \theta)} \right| > 1 \quad \rightarrow \quad \left| \frac{B_3}{A_3} \right| > \left| \frac{B_1}{A_1} \right|.$$

Să admitem că unda reflectată se reflectă încă o dată, amplitudinile respective fiind  $A'_3$  și  $B'_3$ . Raționamentul de mai sus ne conduce atunci la concluzia

$$\left| \frac{B'_3}{A'_3} \right| > \left| \frac{B_3}{A_3} \right| > \left| \frac{B_1}{A_1} \right| \quad \text{etc.}$$

Creșterea raportului  $|B_3/A_3|$  la fiecare reflexie nu poate fi pusă pe seama creșterii lui  $B_3$ , ci pe seama scăderii lui  $A_3$ . Așadar, prin reflexii multiple  $A_3 \rightarrow 0$ . Avem și de data aceasta o polarizare liniară, în planul de incidență, prin *reflexii multiple*.

d) Să ne ocupăm acum de unda refractată. Din (4.44)<sub>1,2</sub> rezultă

$$\frac{B_2}{A_2} = \frac{B_1}{A_1} \cos(\phi - \theta).$$

Cum  $|\cos(\phi - \theta)| < 1$ , deducem că  $|B_2/A_2| < |B_1/A_1|$ . Dacă unda refractată se refractă încă o dată, avem

$$\left| \frac{B'_2}{A'_2} \right| < \left| \frac{B_2}{A_2} \right| < \left| \frac{B_1}{A_1} \right| \quad \text{etc.}$$

Deci prin refracții multiple raportul  $|B_2/A_2| \rightarrow 0$ . Cum  $A_2$  nu poate să tindă la infinit, rezultă  $B_2 \rightarrow 0$ , deci unda refractată se *polarizează liniar, perpendicular pe planul de incidență* (vibrațiile au loc numai în planul de incidență).

e) Să calculăm *coeficientul de reflexie*  $R$  și *coeficientul de transmisie*  $T$ . În acest scop vom defini *vectorul lui Poynting complex*

$$\tilde{\mathbf{\Pi}} = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*), \quad (4.45)$$

unde prin  $*$  am notat conjugata complexă a mărimii respective. Utilizând această definiție, să arătăm pentru început că densitatea fluxului mediu al energiei electromagnetice emise în unitatea de timp este partea reală a componentei normale a vectorului  $\tilde{\mathbf{\Pi}}$ , adică

$$\langle \phi_{em} \rangle = \frac{1}{2} \left[ \text{Re} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \right] \cdot \mathbf{n}, \quad (4.46)$$

unde prin  $\langle \rangle$  se înțelege media pe o perioadă.

Fie, în acest scop, câmpurile  $|\mathbf{E}|$  și  $|\mathbf{H}|$  de forma

$$E = \text{Re } E_o e^{i\phi} e^{i(\omega t - kx)}; \quad H = \text{Re } H_o e^{i\phi'} e^{i(\omega t - kx)},$$

sau

$$E = E_o \cos(\theta + \phi); \quad H = H_o \cos(\theta + \phi'), \quad (4.47)$$

unde  $E_o, H_o$  sunt amplitudini reale, iar  $\theta = \omega t - kx$ . Să efectuăm produsul

$$EH = E_o H_o \cos(\theta + \phi) \cos(\theta + \phi').$$

Din formula trigonometrică

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

deducem imediat  $\alpha = 2\theta + \phi + \phi'$ ,  $\beta = \phi - \phi'$ , prin urmare

$$EH = \frac{E_o H_o}{2} [\cos (2\theta + \phi + \phi') + \cos (\phi - \phi')].$$

Media pe o perioadă a acestei expresii este

$$\begin{aligned} \langle EH \rangle &= \frac{E_o H_o}{2} \frac{1}{T} \int_0^T [\cos (2\theta + \phi + \phi') + \cos (\phi - \phi')] dt = \\ &= \frac{E_o H_o}{2} \cos(\phi - \phi') \end{aligned}$$

Pe de altă parte

$$Re (EH^*) = Re [E_o H_o e^{i(\phi - \phi')}] = E_o H_o \cos (\phi - \phi').$$

Din ultimele două relații rezultă

$$\langle EH \rangle = \frac{1}{2} Re (EH^*),$$

ceea ce înseamnă că este adevărată și relația

$$\langle \mathbf{E} \times \mathbf{H} \rangle = \langle \mathbf{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} Re (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*). \quad (4.48)$$

Înmulțind (4.48) scalar cu versorul  $\mathbf{n}$  al normalei la suprafața  $S$ , rezultă tocmai (4.46).

Utilizând (4.19)<sub>2</sub>, putem scrie

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{\Pi}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{E} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{E}^*) = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) \mathbf{s} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\mathbf{E}_o|^2 \mathbf{s}, \end{aligned}$$

deci

$$\langle \phi_{em} \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\mathbf{E}_o|^2 \mathbf{s} \cdot \mathbf{n}. \quad (4.49)$$



După aceste noțiuni auxiliare, să revenim la scopul enunțat mai sus. Prin definiție, raportul dintre modulul fluxului mediu al energiei unei electromagnetice reflectate și modulul fluxului mediu al energiei unei electromagnetice incidente se numește *coeficient de reflexie* (sau, impropriu, *putere de reflexie*)  $R$

$$R = \frac{|\langle \phi_{em} \rangle_3|}{|\langle \phi_{em} \rangle_1|}. \quad (4.50)$$

În mod analog se definește *coeficientul de transmisie*  $T$  prin relația

$$T = \frac{|\langle \phi_{em} \rangle_2|}{|\langle \phi_{em} \rangle_1|}. \quad (4.51)$$

Folosind (4.49) și având în vedere că  $|\mathbf{n} \cdot \mathbf{s}_1| = \cos \phi$ ,  $|\mathbf{n} \cdot \mathbf{s}_2| = \cos \theta$ ,  $|\mathbf{n} \cdot \mathbf{s}_3| = \cos \phi$ , găsim următoarele expresii pentru cei doi coeficienți

$$R = \frac{|E_{o3}|^2}{|E_{o1}|^2}; \quad T = \frac{\sqrt{\epsilon_2} \cos \theta}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \phi} \frac{|E_{o2}|^2}{|E_{o1}|^2}. \quad (4.52)$$

Principiul conservării energiei ne cere să avem

$$\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{\Pi}}_1 = \mathbf{n} \cdot (\tilde{\mathbf{\Pi}}_2 + \tilde{\mathbf{\Pi}}_3),$$

sau

$$\sqrt{\epsilon_1} \cos \phi |E_{o1}|^2 = \sqrt{\epsilon_1} \cos \phi |E_{o3}|^2 + \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta |E_{o2}|^2. \quad (4.53)$$

Utilizând această relație, din (4.52) deducem  $R + T = 1$ , ceea ce ne permite să interpretăm probabilistic coeficienții  $R$  și  $T$ : coeficientul  $R$  este probabilitatea ca unda incidentă să fie reflectată, iar coeficientul  $T$  este probabilitatea ca unda incidentă să fie transmisă. Suma lor fiind egală cu 1, este *cert* că se va realiza unul dintre cele două evenimente.

Formulele lui Fresnel (4.43) ne permit să verificăm relația  $R + T = 1$  în cazul incidenței normale ( $\phi = \theta = 0$ ). Avem :

$$A_3 = A_1 \frac{\sqrt{\epsilon_2} - \sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_2} + \sqrt{\epsilon_1}} = A_1 \frac{n - 1}{n + 1}; \quad A_2 = A_1 \frac{2}{n + 1},$$

de unde

$$R = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2} ; \quad T = \frac{4n}{(n+1)^2} ; \quad R + T = 1.$$

În cazul reflexiei totale ( $\theta = \pi/2$ ), din (4.53) rezultă  $|E_{o3}|^2 = |E_{o1}|^2$ , iar din (4.52) obținem  $R = 1$ ,  $T = 0$ , ceea ce este evident.

În rezumat, formulele lui Fresnel (4.43) prezintă o deosebită importanță prin aceea că :

- Dau o explicație unitară fenomenelor legate de reflexia și refracția undelor electromagnetice;
- Indică modul în care se produce polarizarea prin reflexie și refracție a unei unde electromagnetice;
- Permit determinarea intensității relative a radiației reflectate și refractate în funcție de indicele de refracție.

### PROBLEME

1. O undă plană, incidentă sub unghiul  $\phi$  și refractată sub unghiul  $\theta$  față de normala la suprafața plană de separație a două medii este polarizată, vectorul electric în unda incidentă făcând unghiul  $\gamma_i$  cu planul de incidență. Să se găsească unghiurile  $\gamma_r$  și  $\gamma_t$  formate de vectorul electric cu planul de incidență în unda reflectată, respectiv în cea refractată. Să se arate că, dacă  $\gamma_i = 0$  sau  $\pi/2$ , nu are loc o modificare a acestui unghi față de situația din unda incidentă.

2. Două plăci dielectrice cu indicele de refracție  $n$  sunt separate printr-un interspațiu umplut cu aer, de indice de refracție unu și grosime  $d$ . Să se determine raportul dintre amplitudinea unei transmise într-una din plăci și cea a unei incidente pe interspațiu din cealaltă placă.

#### §4.5. Propagarea undelor electromagnetice în conductoare masive. Efectul pelicular

Să admitem că planul  $xOy$  coincide cu suprafața plană a unui conductor metalic, ce ocupă întregul semispațiu  $z > 0$  (conductor masiv) (Fig.4.6) și fie o undă electromagnetică plană ce se propagă în direcția axei  $Oz$  (incidență normală), vectorii de câmp  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{B}$  fiind aleși ca în

figură. Fenomenul ce se produce la impactul undei cu metalul va fi descris de ecuațiile lui Maxwell în care, potrivit considerațiilor din §4.1, se neglijează curentul de deplasare în raport cu cel de conducție. Vom presupune unda incidentă de forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{i\omega t}; \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) e^{i\omega t}. \quad (4.54)$$

Avem :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = i\omega \mathbf{B}; \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{i\omega} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \quad (4.55)$$

Pe de altă parte, aplicând *rotorul* ecuației lui Maxwell  $\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}$  și având în vedere celelalte ecuații ale lui Maxwell (vezi &4.1), potrivit lui (4.55) găsim:

$$\Delta \mathbf{B} - \tilde{\epsilon} \mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0, \quad (4.56)$$

unde am notat

$$\tilde{\epsilon} = -i \frac{\lambda}{\omega}. \quad (4.57)$$

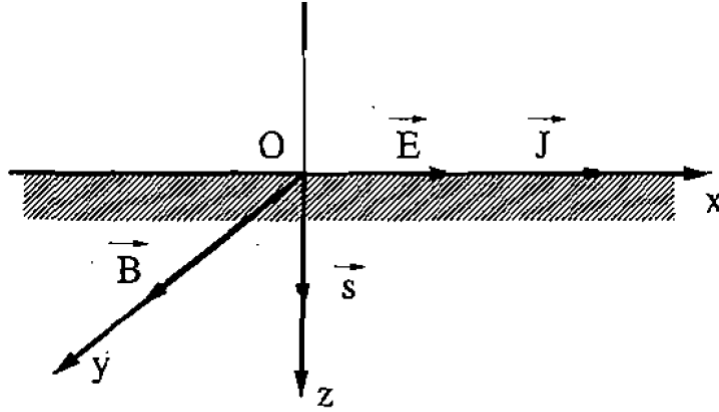


Fig. 4.6.

Așadar, formal, ecuația de propagare a câmpului  $\mathbf{B}$  este ecuația de tip D'Alembert omogenă (4.2), singura diferență (esențială!) fiind că,

de data aceasta, *permitivitatea este imaginară*. Unei permitivități imaginare (în general, complexe), potrivit relației (4.4), îi va corespunde o viteză de fază complexă

$$\tilde{u} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\epsilon}\mu}}, \quad (4.58)$$

deci și un număr de undă complex

$$\tilde{k} = \frac{\omega}{\tilde{u}} = k_1 - ik_2 = \omega \sqrt{-i \frac{\lambda}{\omega} \mu}. \quad (4.59)$$

Separând părțile reală și imaginară, găsim  $k_1^2 = k_2^2$  ;  $k_2^2 = \omega\lambda\mu/2$ , prin urmare, alegând semnul + pentru soluții,

$$\tilde{k} = k(1 - i) = \frac{1 - i}{\delta}, \quad (4.60)$$

unde am notat  $k = k_1 = k_2 = \sqrt{\lambda\mu\omega/2}$ , iar

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\lambda\mu\omega}} \quad (4.61)$$

poartă numele de *adâncime de pătrundere*. Cu aceste notații, având în vedere că propagarea are loc în direcția axei  $Oz$ , câmpul  $\mathbf{B}(z)$  se va obține ca soluție a ecuației

$$\frac{d^2\mathbf{B}(z)}{dz^2} + \tilde{k}^2\mathbf{B}(z) = 0$$

și va fi de forma

$$\mathbf{B}(z) = \mathbf{B}_o e^{-\tilde{k}z},$$

în care am luat în considerație doar unda progresivă. Coroborând aceste rezultate, obținem câmpul  $\mathbf{B}(z, t)$  din undă sub forma

$$\mathbf{B}(z, t) = \mathbf{B}_o e^{i(\omega t - \tilde{k}z)} = \mathbf{B}_o e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta})}. \quad (4.62)$$

Întrucât avem de-a face cu o undă transversală, câmpul  $\mathbf{E}(z, t)$  se va exprima printr-o relație de forma (4.19)<sub>1</sub>, adică

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(z, t) &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{H} \times \mathbf{s} = \tilde{u} \mathbf{B} \times \mathbf{s} = \frac{1+i}{\lambda\mu\delta} \mathbf{B} \times \mathbf{s} = \\ &= \frac{1+i}{\lambda\mu\delta} \mathbf{B}_o \times \mathbf{s} e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta})} .\end{aligned}\quad (4.63)$$

Potrivit convenției de la începutul paragrafului, câmpul  $\mathbf{E}$  este orientat după axa  $Ox$ , iar câmpul  $\mathbf{B}$  după axa  $Oy$ , prin urmare dacă notăm  $E = E_x$ ,  $B = B_y$  și observăm că  $E = (1+i)B/\lambda\mu\delta$ , părțile reale ale componentelor de câmp  $E$  și  $B$  (a căror scriere este necesară în vederea comparării celor două câmpuri) vor fi :

$$\begin{aligned}Re E &= \frac{B_o}{\lambda\mu\delta} e^{-\frac{z}{\delta}} \left[ \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) - \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \right] = \\ &= \frac{\sqrt{2}B_o}{\lambda\mu\delta} e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right) ,\end{aligned}\quad (4.64)$$

$$Re B = B_o e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right). \quad (4.65)$$

Comparând ultimele două relații, ajungem la concluzia că, în unda ce se propagă prin conductor, câmpurile  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{B}$  *sunt defazate cu  $\pi/4$* . Cum  $\mathbf{j} = \lambda\mathbf{E}$ , între  $\mathbf{B}$  și  $\mathbf{j}$  există același defazaj. Relațiile (4.64) și (4.65) ne mai arată că ambele componente de câmp sunt *atenuate*, efect exprimat de factorul  $\exp(-z/\delta)$ . Amplitudinea câmpului (a densității de curent) descrește exponențial plecând de la  $z = 0$  (suprafața conductorului), atenuarea fiind cu atât mai puternică cu cât  $\delta$  este mai mic, deci cu cât  $\lambda, \mu, \omega$  sunt mai mari. Pentru  $\lambda$  și  $\mu$  dați, adâncimea de pătrundere a undei este cu atât mai mică cu cât pulsația undei este mai mare. În consecință, *curenții de înaltă frecvență sunt localizați la suprafața conductoarelor*, într-un strat cu atât mai subțire cu cât frecvența este mai mare. Fenomenul este cunoscut sub numele de *efect pelicular* (*skin effect* în limba engleză).

Considerațiile teoretice de mai sus sunt confirmate de experiment. Pentru exemplificare, vom da valorile a două adâncimi de pătrundere corespunzătoare la două frecvențe diferite, în cazul cuprului :

$$\begin{aligned} &\text{pentru } \nu = 50Hz, \delta = 6cm ; \\ &\text{pentru } \nu = 5.10^5Hz, \delta = 0,06cm. \end{aligned}$$

**Observație.** În cazul conductoarelor, raportul dintre componentele magnetică și electrică ale energiei câmpului electromagnetic este

$$\frac{w_m}{w_e} \sim \left( \frac{\lambda}{\epsilon\omega} \right)^2 \sim \beta^2. \quad (4.66)$$

Cum metalele se caracterizează prin  $\beta \gg 1$  (vezi §4.1) , rezultă că în metale, spre deosebire de dielectrici, energia câmpului magnetic nu se împarte în mod egal între cele două componente, ci

$$w_m \gg w_e.$$

#### §4.6. Propagarea undelor electromagnetice în medii de tip semiconductor

Așa cum am arătat în §4.1, studiul proprietăților undelor electromagnetice în semiconductoare se realizează cu ajutorul ecuațiilor (4.1). Admițând că în mediu se propagă o undă monocromatică de pulsație  $\omega$  și repetând raționamentul din paragraful precedent, găsim după calcule simple

$$\Delta \mathbf{E} - \tilde{\epsilon}\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 ; \quad \Delta \mathbf{B} - \tilde{\epsilon}\mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0, \quad (4.67)$$

în care am definit *permitivitatea complexă*  $\tilde{\epsilon}$  prin relația

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon - i \frac{\lambda}{\omega}. \quad (4.68)$$

Așadar, din punctul de vedere al propagării undelor monocromatice, semiconductorul este *echivalent* cu un dielectric de permitivitate

complexă  $\tilde{\epsilon}$  (spre deosebire de modelul dielectricilor, unde permitivitatea este reală și de modelul conductoarelor, a căror permitivitate este pur imaginară).

Existența unei permitivități complexe implică o viteză de fază complexă  $\tilde{u} = 1/\sqrt{\tilde{\epsilon}\mu}$ , deci și un număr de undă complex

$$\tilde{k} = \frac{\omega}{\tilde{u}} = \omega\sqrt{\tilde{\epsilon}\mu} = \omega\sqrt{\mu\left(\epsilon - i\frac{\lambda}{\omega}\right)} = k_1 - ik_2. \quad (4.69)$$

Pentru a exprima părțile reală și imaginară ale numărului de undă complex  $\tilde{k}$  în funcție de  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $\omega$ , ridicăm la pătrat (4.69), după care identificăm părțile reală și imaginară din cei doi membri. Rezultă:

$$k_1^2 - k_2^2 = \epsilon\mu\omega^2 ; \quad k_1k_2 = \frac{1}{2}\lambda\mu\omega.$$

Rezolvând acest sistem, găsim

$$k_1^2 = \frac{\epsilon\mu\omega^2}{2} \left[ \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\omega^2\epsilon^2}} + 1 \right] ; \quad k_2^2 = \frac{\epsilon\mu\omega^2}{2} \left[ \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\omega^2\epsilon^2}} - 1 \right], \quad (4.70)$$

prin urmare  $\tilde{k}$  va avea forma

$$\tilde{k} = k_1 - ik_2 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} e^{i\phi} ; \quad \text{tg } \phi = \frac{k_2}{k_1}. \quad (4.71)$$

Să exploatăm acum analogia dintre ecuațiile (4.67) și cele ce descriu propagarea undelor plane, monocromatice în medii dielectrice (vezi 4.2). Astfel, soluțiile acestor ecuații vor fi

$$\{\mathbf{E}, \mathbf{B}\} = \{\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0\} e^{i(\omega t - \tilde{k}\mathbf{s}\cdot\mathbf{r})} = \{\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0\} e^{-k_2\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}} e^{i(\omega t - \mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r})}. \quad (4.72)$$

De asemenea, în virtutea lui (4.18) și (4.19), avem

$$\mathbf{s}\cdot\mathbf{E} = 0 ; \quad \mathbf{s}\cdot\mathbf{H} = 0 ; \quad \mathbf{H} = \sqrt{\frac{\tilde{\epsilon}}{\mu}} \mathbf{s} \times \mathbf{E} = \frac{\tilde{k}}{\mu\omega} \mathbf{s} \times \mathbf{E}. \quad (4.73)$$

Înlocuind (4.71) în ultima relație, obținem:

$$\mathbf{H} = \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}{\mu\omega} \mathbf{s} \times \mathbf{E}_o e^{-k_2 \mathbf{s} \cdot \mathbf{r}} e^{i\phi} e^{i(\omega t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})}. \quad (4.74)$$

Considerațiile de mai sus ne arată că în mediile de tip semiconductor avem *unde plane, transversale, atenuate*, între câmpurile  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{H}$  existând o diferență de fază  $\phi$ . Atenuarea (amortizarea) undei se datorează absorbției acesteia de către mediu, fenomenul fiind exprimat prin  $\exp(-k_2 \mathbf{s} \cdot \mathbf{r})$ , deci prin factorul ce conține *partea imaginară* a numărului de undă complex. Dacă  $\lambda = 0$ , din (4.70) deducem  $k_2 = 0$  și absorbția nu are loc, iar cele două câmpuri sunt în fază (dielectrici).

### Observații

a) Prezența unei permitivități complexe  $\tilde{\epsilon}$  implică existența unui indice de refracție complex :

$$\tilde{n} = \frac{c}{\tilde{u}} = \frac{c}{\omega} \tilde{k} = n_1 - i n_2. \quad (4.75)$$

În general, indicele de refracție variază cu lungimea de undă, prin urmare mediile semiconductoare sunt nu numai absorbante, ci și *dispersive*. Fenomenului dispersiei îi vom consacra un paragraf separat.

b) Dacă  $\beta \ll 1$  (cazul dielectricilor), prin dezvoltarea în serie a radicalului din (4.70) avem

$$\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\omega^2 \epsilon^2}} \simeq 1 + \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\omega^2 \epsilon^2}, \quad (4.76)$$

prin urmare

$$k_1^2 \simeq \epsilon \mu \omega^2 \left( 1 + \frac{1}{4} \frac{\lambda^2}{\omega^2 \epsilon^2} \right); \quad k_2^2 \simeq \frac{1}{4} \frac{\mu \lambda^2}{\epsilon}, \quad (4.77)$$

deci *atenuarea undei este independentă de pulsația  $\omega$* . Dacă  $\lambda \rightarrow 0$ , obținem

$$k_2 = 0, \quad k_1 = k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}, \quad (4.78)$$



rezultat cunoscut.

La metale ( $\beta \gg 1$ ), deoarece  $\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\omega^2 \epsilon^2}} \simeq \frac{\lambda}{\epsilon \omega}$ , avem din (4.70) :

$$k_1^2 = k_2^2 = \frac{1}{2} \omega \lambda \mu, \quad (4.80)$$

caz întâlnit la studiul propagării undelor prin conductoare.

Rezultă că mediile de tip dielectric și conductor pot fi tratate, în privința propagării undelor electromagnetice, drept cazuri limită ale mediilor de tip semiconductor, corespunzătoare valorilor  $\beta \ll 1$ , respectiv  $\beta \gg 1$ .

#### §4.7. Propagarea undelor electromagnetice în medii anizotrope

După cum se știe, mediile anizotrope (cristalele) au proprietăți diferite după direcții diferite. La aceste corpuri permitivitatea și permeabilitatea sunt mărimi tensoriale, iar ecuațiile constitutive se scriu

$$D_i = \epsilon_{ik} E_k ; \quad B_i = \mu_{ik} H_k \quad (i, k = 1, 2, 3). \quad (4.81)$$

În cele ce urmează ne vom limita la cristalele cu proprietăți de dielectric, transparente pentru undele electromagnetice, având  $\mu_r \simeq 1$ . Deoarece

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = E_i D_i = E_k D_k,$$

avem

$$E_i (\epsilon_{ik} E_k) = E_k (\epsilon_{ki} E_i),$$

prin urmare tensorul permitivității electrice este *simetric*

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki}.$$

În mod analog se deduce proprietatea

$$\mu_{ik} = \mu_{ki}.$$

### Elipsoidul lui Fresnel

Vom presupune că mărimile ce caracterizează cristalul din punct de vedere magnetic au valori apropiate de cele ale vidului. O consecință imediată a acestei ipoteze este  $W_e \gg W_m$ . Densitatea componentei electrice a energiei electromagnetice va fi atunci

$$\begin{aligned} 2w_e &= \epsilon_{ik} E_i E_k = \epsilon_{11} E_1^2 + \epsilon_{22} E_2^2 + \epsilon_{33} E_3^2 + \\ &+ 2\epsilon_{12} E_1 E_2 + 2\epsilon_{23} E_2 E_3 + 2\epsilon_{31} E_3 E_1 = \\ &= \sum_i \epsilon_{ii} E_i^2 + 2 \sum_{i>k} \epsilon_{ik} E_i E_k \quad (i, k = 1, 2, 3), \end{aligned}$$

sau, dacă împărțim cu  $2w_e$  și notăm  $X_i = E_i / \sqrt{2w_e}$

$$\sum_i \epsilon_{ii} X_i^2 + 2 \sum_{i>k} \epsilon_{ik} X_i X_k = 1. \quad (4.82)$$

Aceasta este o cuadrică, anume un elipsoid, căci toți  $\epsilon_{ik} > 0$ . După cum se știe, putem face o rotație convenabilă a axelor de coordonate ( $X_i \rightarrow X'_i$ ), astfel încât noile axe  $X'_i$  să coincidă cu axele principale ale elipsoidului. În acest caz, tensorul permitivității devine diagonal, iar ecuația (4.82) se reduce la forma canonică

$$\sum_i \epsilon'_{ii} X_i'^2 = 1.$$

Dacă notăm

$$\epsilon'_{ii} = \epsilon'_i; \quad \sqrt{\epsilon'_i} = \frac{1}{a'_i}, \quad (4.83)$$

mai putem scrie

$$\sum_i \frac{X_i'^2}{a_i'^2} = \frac{X'^2}{a'^2} + \frac{Y'^2}{b'^2} + \frac{Z'^2}{c'^2} = 1, \quad (4.84)$$

unde am mai notat  $a'_1 = a'$ ,  $a'_2 = b'$ ,  $a'_3 = c'$ . Componentele  $\epsilon'_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) ale tensorului permitivității, redus la forma diagonală,

sunt permitivitățile mediului după axele principale ale elipsoidului și se numesc *permitivități principale*, iar elipsoidul de ecuație (4.84) se numește *elipsoidul lui Fresnel*.

Renunțând la indicele "prim", vom scrie (4.84) sub forma

$$\epsilon_x X^2 + \epsilon_y Y^2 + \epsilon_z Z^2 = 1,$$

sau, dacă ținem seama că  $n_i^2 = (\epsilon_r)_i = \epsilon_i/\epsilon_o$  ( $i = 1, 2, 3$ ),

$$\epsilon_o (n_x^2 X^2 + n_y^2 Y^2 + n_z^2 Z^2) = 1. \quad (4.85)$$

Întrucât după direcția axelor principale ale elipsoidului lui Fresnel avem

$$D_x = \epsilon_x E_x ; \quad D_y = \epsilon_y E_y ; \quad D_z = \epsilon_z E_z, \quad (4.86)$$

conchidem că, în cazul în care direcția câmpului  $\mathbf{E}$  coincide cu direcția uneia dintre axele principale ale elipsoidului lui Fresnel, câmpul  $\mathbf{D}$  are aceeași direcție. Pentru orice altă direcție, câmpurile  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{D}$  nu coincid.

### Legea lui Fresnel a vitezelor undelor electromagnetice

Ne propunem să stabilim o legătură între viteza de propagare a unei electromagnetice într-un mediu anizotrop și direcția de propagare a undei. În acest sens vom admite că într-un cristal caracterizat prin  $\mathbf{j} = 0$ ,  $\rho = 0$ ,  $\mu_r \simeq 1$  se propagă o undă electromagnetică plană monocromatică de forma

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_o e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} ; \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}_o e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} ; \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_o e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Dacă direcția de propagare este definită prin versorul  $\mathbf{s}(\alpha, \beta, \gamma)$ , faza undei va fi

$$\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \omega \left( t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{u} \right) = \omega \left( t - \frac{\alpha_k x_k}{u} \right),$$

unde am notat  $\alpha = \alpha_1$ ,  $\beta = \alpha_2$ ,  $\gamma = \alpha_3$ .

Pentru soluționarea problemei propuse, vom utiliza ecuațiile lui Maxwell sub forma convenabilă

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} ; \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} ; \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 ; \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0. \quad (4.88)$$

Admițând că tensorul permitivității  $\epsilon_{ik}$  este diagonal, vom scrie relațiile (4.86), comprimat, în una singură

$$D_i = \epsilon_i E_i \text{ (fără sumare) ; } \quad (i = 1, 2, 3) .$$

Dacă  $l, m, n$  sunt cosinusurile directoare ale câmpului  $\mathbf{D}$ , mai avem

$$D_i = l_i D ; \quad (l_1 = l, l_2 = m, l_3 = n ; i = 1, 2, 3).$$

Din (4.88)<sub>4</sub> rezultă atunci

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{s} = \alpha_k l_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3). \quad (4.89)$$

Pe de altă parte, din (4.88)<sub>1,2</sub> avem

$$-\mu \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = -\Delta \mathbf{E} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}). \quad (4.90)$$

Componenta după  $x_i$  a acestei ecuații vectoriale este

$$-\mu \frac{\partial^2 D_i}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_i} \Delta D_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{\epsilon_k} \frac{\partial D_k}{\partial x_k} \right),$$

unde se însumează numai după  $k$  (după  $i$  nu se însumează !). Mai putem scrie

$$-\mu l_i \frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = -\frac{l_i}{\epsilon_i} \Delta D + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{l_k}{\epsilon_k} \frac{\partial D_k}{\partial x_k} \right),$$

sau, dacă avem în vedere (4.87)<sub>2</sub> și efectuăm simplificările indicate,

$$\mu l_i = \frac{l_i}{\epsilon_i u^2} - \frac{\alpha_i \alpha_k}{\epsilon_k u^2} l_k.$$

Notând

$$\frac{1}{\mu\epsilon_i} = v_i^2 ; \quad u_k^2 l_k \alpha_k = A^2, \quad (4.91)$$

avem încă

$$l_i = - \frac{\alpha_i}{u^2 - v_i^2} A^2.$$

Înmulțind această relație cu  $\alpha_i$ , apoi însumând după  $i$  și ținând seama de (4.89), obținem

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i^2}{u^2 - v_i^2} = 0.$$

Dacă mai notăm  $v_1 = a$ ,  $v_2 = b$ ,  $v_3 = c$ , avem în fine

$$\frac{\alpha^2}{u^2 - a^2} + \frac{\beta^2}{u^2 - b^2} + \frac{\gamma^2}{u^2 - c^2} = 0, \quad (4.92)$$

relație denumită *legea vitezelor a lui Fresnel* sau *formula lui Fresnel*.

Pentru a determina semnificația mărimilor  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $c^2$ , vom admite – pe rând – că unda electromagnetică se propagă în lungul axelor  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ . Pentru cazul propagării în direcția  $Ox$ , avem :  $\alpha = 1$ ,  $\beta = \gamma = 0$ , iar din (4.92) rezultă

$$(u^2 - b^2) (u^2 - c^2) = 0,$$

ceea ce înseamnă fie  $u^2 = b^2$ , fie  $u^2 = c^2$ , adică  $u_{1x}^2 = b^2$ ,  $u_{2x}^2 = c^2$ . În mod asemănător găsim :  $u_{1y}^2 = a^2$ ,  $u_{2y}^2 = c^2$  și  $u_{1z}^2 = a^2$ ,  $u_{2z}^2 = b^2$ . Conchidem că  $a^2, b^2, c^2$  au semnificația unor viteze ale undei electromagnetice în direcția axelor principale ale elipsoidului lui Fresnel, motiv pentru care se numesc *viteze principale*.

Formula lui Fresnel este o ecuație algebrică bipătrată în  $u$  cu coeficienți reali, deci admite două rădăcini  $u_1^2$  și  $u_2^2$ . Așadar, pentru o direcție dată s a undei electromagnetice incidente, în cristal vor exista două valori absolute distincte pentru viteză, deci două unde cu viteze diferite  $u_1$  și  $u_2$ . În cele ce urmează ne propunem să evidențiem semnificația vitezelor undelor electromagnetice după diferite direcții, admitând  $a > b > c$ .

a) Presupunem că direcția de propagare a unde este situată în planul  $yOz$  ( $\alpha = 0$ ). Din legea vitezelor (4.92) rezultă atunci

$$(u^2 - a^2) \left( \frac{\beta^2}{u^2 - b^2} + \frac{\gamma^2}{u^2 - c^2} \right) = 0,$$

cu soluțiile

$$u_1^2 - a^2 = 0 ; \quad \frac{\beta^2}{u_2^2 - b^2} + \frac{\gamma^2}{u_2^2 - c^2} = 0.$$

Utilizând relația  $\beta^2 + \gamma^2 = 1$  ( $\alpha = 0$ ), din ultima relație deducem

$$u_2^2 = \beta^2 c^2 + \gamma^2 b^2. \quad (4.93)$$

Deci unda electromagnetică, în cristal, suferă fenomenul de *birefrință*, descompunându-se în două unde (raze) : *raza ordinară*, cu viteza  $|u_1| = a$  și *raza extraordinară*, cu viteza  $|u_2| = \sqrt{\beta^2 c^2 + \gamma^2 b^2}$ . În planul considerat ( $yOz$ ) prima reprezintă un *cerc*, iar a doua o *elipsă*. Intersecțiile elipsei cu axele de coordonate se găsesc punând în (4.93)  $\gamma = 0$  ( $u_{2y} = \pm c$ ), respectiv  $\beta = 0$  ( $u_{2z} = \pm b$ ) (vezi Fig.4.7a). Se observă că pentru orice direcție ce pleacă din 0,  $u_1 \neq u_2$ .

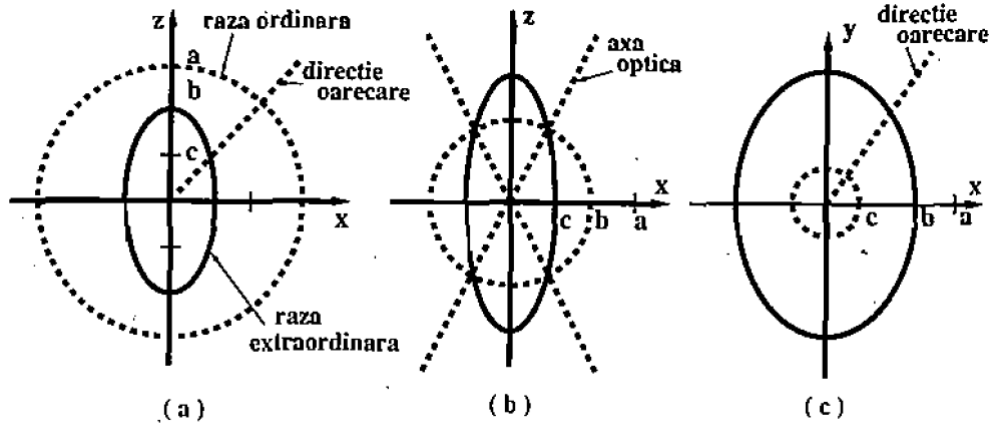


Fig. 4.7.

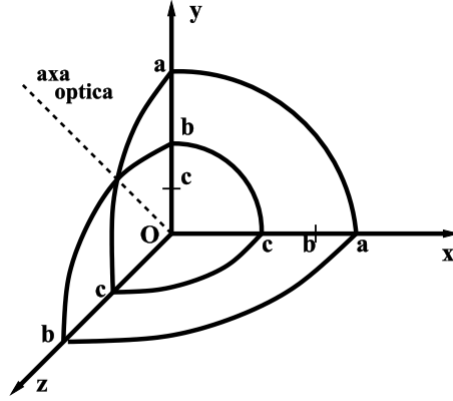
b) Dacă direcția de propagare este în planul  $xOz$  ( $\beta = 0$ ), din (4.92) deducem

$$(u^2 - b^2) \left( \frac{\alpha^2}{u^2 - a^2} + \frac{\gamma^2}{u^2 - c^2} \right) = 0,$$

cu soluțiile

$$u_1^2 = b^2 ; \quad u_2^2 = \alpha^2 c^2 + \gamma^2 a^2 \rightarrow \begin{cases} u_{2x} = \pm c ; \\ u_{2z} = \pm a . \end{cases}$$

Există două direcții în planul  $xOz$  pentru care  $u_1 = u_2$  (vezi Fig.4.7b). Aceste direcții definesc *axe optice* ale cristalului. Un cristal are maximum două axe optice. Cristalul cu o singură axă optică se numește *uniax*, iar cel cu două - *biax*.



**Fig. 4.8.**

c) Pentru cazul în care direcția de propagare este în planul  $xOy$ , ecuația (4.92) conduce la

$$(u^2 - c^2) \left( \frac{\alpha^2}{u^2 - a^2} + \frac{\beta^2}{u^2 - b^2} \right) = 0,$$

cu soluțiile

$$u_1^2 = c^2 ; \quad u_2^2 = \alpha^2 b^2 + \beta^2 a^2 \rightarrow \begin{cases} u_{2x} = \pm b ; \\ u_{2y} = \pm a , \end{cases}$$

reprezentate geometric în Fig 4.7c. Se observă că în planul  $xOy$  nu există axe optice.

Cele trei reprezentări geometrice din Fig.4.7 pot fi reunite în una singură, așa cum este arătat în Fig.4.8, obținându-se astfel reprezentarea

geometrică spațială a vitezelor razelor ordinară și extraordinară după diferite direcții.

Să determinăm cosinusurile directoare  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  ale axei optice a cristalului în funcție de vitezele principale  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . În acest scop vom scrie legea vitezelor a lui Fresnel sub forma

$$u^4 - [\alpha^2(b^2 + c^2) + \beta^2(a^2 + c^2) + \gamma^2(a^2 + b^2)]u^2 + \\ + \alpha^2b^2c^2 + \beta^2a^2c^2 + \gamma^2a^2b^2 = 0 .$$

Pentru ca această ecuație să aibă rădăcini confundate  $u_1^2 = u_2^2$ , situație corespunzătoare existenței unei axe optice, trebuie să avem :

$$[\alpha^2(b^2 + c^2) + \beta^2(a^2 + c^2) + \gamma^2(a^2 + b^2)]^2 - \\ - 4(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\alpha^2b^2c^2 + \beta^2a^2c^2 + \gamma^2a^2b^2) = 0,$$

unde în ultimul termen am înmulțit cu  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ . Aranjând în mod convenabil termenii, mai putem scrie

$$[\alpha^2(b^2 - c^2)]^2 + [\beta^2(c^2 - a^2)]^2 + [\gamma^2(a^2 - b^2)]^2 - \\ - 2[\alpha^2(b^2 - c^2)][\beta^2(c^2 - a^2)] - 2[\beta^2(c^2 - a^2)][\gamma^2(a^2 - b^2)] - \\ - 2[\gamma^2(a^2 - b^2)][\alpha^2(b^2 - c^2)] = 0,$$

sau

$$A^2 + B^2 + C^2 - 2AB - 2BC - 2CA = 0$$

în care am notat

$$A = \alpha^2(b^2 - c^2) ; \quad B = \beta^2(c^2 - a^2) ; \quad C = \gamma^2(a^2 - b^2). \quad (4.94)$$

Ultima ecuație se mai scrie

$$(A + B - C)^2 - 4AB = 0. \quad (4.95)$$

Mentținând ipoteza  $a > b > c$  (vezi Fig.4.7 și Fig.4.8), deducem  $A > 0$ ,  $B < 0$ ,  $C > 0$ , deci  $-4AB > 0$ . Din (4.95) rezultă atunci

$$A + B - C = 0 ; \quad AB = 0. \quad (4.96)$$



Dacă  $A = 0$ , din  $(4.96)_1$  avem  $B = C$ . Cum însă  $B$  și  $C$  au semne diferite, singura posibilitate este  $B = C = 0$ . Dar  $A = B = C = 0$  înseamnă  $a = b = c$ , ceea ce corespunde unui mediu izotrop. Pentru ca mediul să fie anizotrop, trebuie așadar să avem  $A \neq 0$ , ceea ce presupune  $B = 0$ , iar din  $(4.96)_1$  rezultă  $A = C$ , adică sistemul

$$\beta^2(c^2 - a^2) = 0 ; \quad \alpha^2(b^2 - c^2) = \gamma^2(a^2 - b^2) . \quad (4.97)$$

Posibilitatea  $c = a$  ar presupune  $a = b = c$  (căci, prin ipoteză,  $a > b > c$ ), ceea ce ar corespunde unui mediu izotrop. Excluzând această posibilitate, rămâne  $\beta = 0$ . Utilizând relațiile  $\alpha^2 + \gamma^2 = 1$  și  $(4.97)_2$ , rezultă atunci

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} ; \quad \gamma = \pm \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}} . \quad (4.98)$$

Așadar, axa optică principală se găsește în planul  $xOz$  (lucru deja cunoscut) și are parametrii directori definiți prin (4.98). Din  $a > b > c$  rezultă că acești parametri sunt reali.

Fie  $\mathbf{E}_1, \mathbf{D}_1$  vectorii de câmp corespunzători razei ordinare și  $\mathbf{E}_2, \mathbf{D}_2$  vectorii de câmp corespunzători razei extraordinare. Utilizând (4.87) și (4.88), obținem

$$\mathbf{D} = \frac{1}{u} \mathbf{H} \times \mathbf{s} ; \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu u} \mathbf{s} \times \mathbf{E},$$

din care, prin eliminarea lui  $\mathbf{H}$ , deducem

$$\mathbf{D} = \frac{1}{\mu u^2} [\mathbf{E} - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{s}]. \quad (4.99)$$

Să transcriem această relație pentru cele două raze

$$\mu u_1^2 \mathbf{D}_1 = \mathbf{E}_1 - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{E}_1) \mathbf{s} ; \quad \mu u_2^2 \mathbf{D}_2 = \mathbf{E}_2 - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{E}_2) \mathbf{s},$$

apoi să înmulțim scalar relațiile obținute cu  $\mathbf{D}_2$ , respectiv cu  $\mathbf{D}_1$  și să le scădem. Rezultă

$$\mu(u_1^2 - u_2^2) \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{D}_2 = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{D}_2 - \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{D}_1 = 0,$$

căci

$$\mathbf{E}_1 \mathbf{D}_2 = E_{1i} D_{2i} = \epsilon_i E_{1i} E_{2i} ; \quad \mathbf{E}_2 \mathbf{D}_1 = E_{2i} D_{1i} = \epsilon_i E_{2i} E_{1i}.$$

Așadar, dacă  $u_1 \neq u_2$ , avem  $\mathbf{D}_1 \perp \mathbf{D}_2$ , adică vectorii  $\mathbf{D}_1$  și  $\mathbf{D}_2$  sunt reciproc ortogonali și oscilează în plane perpendiculare. Planul ce conține axa optică și raza incidentă se numește *plan principal* al cristalului sau *secțiune principală*. În concluzie, raza incidentă se descompune în cristal în două raze polarizate în plane perpendiculare : raza ordinară, polarizată în planul secțiunii principale și cea extraordinară, polarizată perpendicular pe acest plan.

### Problemă

Să se găsească densitățile de energie electrică și magnetică în cazul unei unde plane ce se propagă în direcția  $\mathbf{s}$ , într-un mediu dielectric anizotrop.

## §4.8. Dispersia undelor electromagnetice

### Considerații preliminare

Fie  $F(x)$  o funcție definită pe intervalul  $-\infty < x < +\infty$ . Prin definiție, *transformata Fourier* a funcției  $f(x)$  este

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (4.100)$$

Funcția  $F(k)$  se numește *distribuția spectrală* a lui  $f(x)$  sau, pe scurt, *spectrul lui*  $f(x)$ .

Operația inversă, prin care obținem funcția  $f(x)$  plecând de la transformata Fourier, se numește *transformata Fourier inversă*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{ikx} dk. \quad (4.101)$$

Înlocuind formal  $F(k)$  în (4.101) cu expresia (4.100), în care schimbăm variabila de integrare din  $x$  în  $x'$ , avem

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-x')} dk \right] dx'. \quad (4.102)$$

Comparând (4.102) cu relația ce exprimă proprietatea de filtraj a distribuției *delta* a lui Dirac (vezi E.6)

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \delta(x - x') dx', \quad (4.103)$$

deducem reprezentarea Fourier a distribuției *delta*

$$\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-x')} dk. \quad (4.104)$$

Fie, acum,  $f(x, t)$  soluția ecuației de propagare, în direcția axei  $Ox$ , a unei unde plane monocromatice (vezi 4.5). Reprezentarea lui  $f(x, t)$  prin integrală Fourier se va scrie

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k, t) e^{ikx} dk, \quad (4.105)$$

unde am presupus că variabila  $t$  rămâne nemodificată. Ecuația undei

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

cere să avem

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ k^2 F(k, t) + \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 F(k, t)}{\partial t^2} \right] e^{ikx} dk = 0.$$

Dacă transformata Fourier a unei funcții este nulă, înseamnă că însăși funcția este nulă, deci

$$\frac{\partial^2 F(k, t)}{\partial t^2} + u^2 k^2 F(k, t) = 0. \quad (4.106)$$

Soluția generală a acestei ecuații este de forma

$$F(k, t) = A(k) e^{-ikut} + B(k) e^{ikut}, \quad (4.107)$$

iar  $f(x, t)$  devine

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ A(k) e^{ik(x-ut)} + B(k) e^{ik(x+ut)} \right] dk.$$

Primul termen corespunde unei unde progresive, iar cel de al doilea unei unde regresive. Limitându-ne la primul termen – procedeu deja adoptat și utilizat în acest capitol – avem așadar soluția

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{ik(x-ut)} dk, \quad (4.108)$$

în care  $u$  este viteza de fază a undei, iar  $k$  numărul de undă, deci

$$ku = \frac{2\pi}{\lambda} u = 2\pi\nu = \omega.$$

Soluția (4.108) se poate interpreta ca rezultând prin suprapunerea unui număr infinit de unde, toate deplasându-se în direcția  $Ox$  și având un spectru continuu de frecvențe, de amplitudini  $A(k)$  dependente de variabila  $k$ .

Să admitem că la momentul  $t = 0$ , se dă  $f(x, 0) = g(x)$  :

$$f(x, 0) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{ikx} dk.$$

Spectrul  $A(k)$  se obține prin transformata Fourier inversă

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x') e^{-ikx'} dx',$$

iar (4.108) devine

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x') \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-x'-ut)} dk \right] dx' = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x') \delta(x - x' - ut) dx' = g(x - ut), \end{aligned}$$

adică primul termen, corespunzător unei unde progresive, din soluția generală (4.6). Atragem atenția că în dezvoltarea raționamentului de până acum nu am ținut seama de dispersia mediului.

În trei dimensiuni, trecerea de la spațiul vectorilor de poziție  $\mathbf{r}$  la cel al vectorilor de undă  $\mathbf{k}$  se realizează prin transformarea

$$f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{k}, \quad (4.109)$$

unde  $d\mathbf{k} = dk_x dz_y dk_z$ .

Relația (4.109) rămâne valabilă și pentru funcțiile de câmp vectoriale, de pildă câmpul  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  va fi reprezentat prin transformata Fourier

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_o(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{k}. \quad (4.110)$$

**Observație.** Transformatele Fourier (4.100) și (4.101) sunt una inversa celeilalte, prin urmare alegerea semnului exponențialei în (4.100), deci și în (4.110), este arbitrară. Aceasta rezultă și din faptul că  $\text{Re exp}[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$  este o funcție pară.

### Viteză de fază și viteză de grup

Fenomenele analizate în prezentul capitol au avut ca suport ipoteza propagării perturbațiilor electromagnetice prin unde plane, monocromatice în medii liniare și omogene, prin aceasta înțelegând că funcția de undă (soluția ecuației undelor) este proporțională cu factorul  $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$ ,  $\mathbf{k}$  și  $\omega$  fiind independenți de  $\mathbf{r}$  și  $t$ , admitând totodată că două unde pot exista simultan, independent una de alta.

În realitate, pulsația  $\omega$  este – în general – o funcție de vectorul de undă  $\mathbf{k}$ :  $\omega = \omega(\mathbf{k})$ . Această relație exprimă *ecuația de dispersie* ce caracterizează mediul în care are loc propagarea undelor. În mediile izotrope toate direcțiile sunt echivalente și  $\omega$  depinde numai de  $k = |\mathbf{k}|$ :  $\omega = \omega(k)$ . De pildă, pulsația unei unde luminoase într-un dielectric liniar este  $\omega = ku = kc/n = kc/\sqrt{\epsilon\mu}$ .

Să scriem faza  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$  sub forma

$$\mathbf{k} \cdot \left( \mathbf{r} - \frac{\omega}{k} \mathbf{s} t \right),$$

unde  $\mathbf{s}$  este versorul lui  $\mathbf{k}$ . Se observă că faza este constantă de-a lungul traiectoriilor

$$\mathbf{r} - \frac{\omega}{k} \mathbf{s} t = \mathbf{r}_o = \text{const.}$$

sau

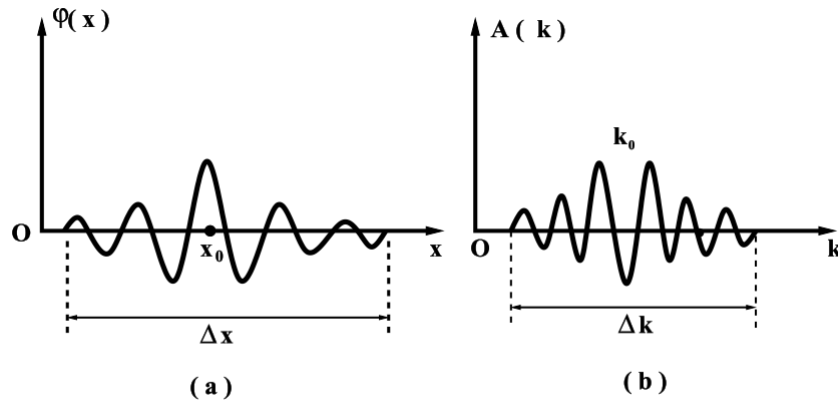
$$\mathbf{r} = \mathbf{u}_f t + \mathbf{r}_o,$$

unde mărimea

$$\mathbf{u}_f = \frac{\omega}{k} \mathbf{s} \quad (4.111)$$

se numește *viteză de fază*

Modelul undelor plane monocromatice, utilizat până în prezent de noi ca instrument de lucru, corespunde însă numai aproximativ realității. Într-adevăr, o astfel de undă nu este limitată în spațiu sau/și temporal, iar elementele sale caracteristice (pulsăția, amplitudinea, lungimea de undă) sunt considerate permanent constante. Dar, pentru a transmite (și recepționa) un semnal, acesta trebuie să fie limitat, iar amplitudinea semnalului trebuie să fie variabilă. O sursă de unde electromagnetice emite, de fapt, *grupuri* sau *pachete de unde*, rezultate prin suprapunerea unor unde de pulsății foarte apropiate.



**Fig. 4.9.**

Pentru a înțelege ce este un pachet de unde, să considerăm cazul simplu al propagării unei perturbații în direcția  $Ox$ . Dacă perturbația

este caracterizată prin funcția  $\phi(x)$ , descompunerea spectrală a acesteia va fi (vezi 4.101) :

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int A(k) e^{ikx} dk.$$

Să admitem că perturbația este localizată în jurul unei poziții  $x_o$  și este construită dintr-o serie de numere de undă ce au valorile distribuite în jurul unei valori  $k_o$  (Fig.4.9 a, b). Fie  $\Delta x$  și  $\Delta k$  dimensiunile pachetului de unde în spațiul coordonatelor, respectiv în cel al numerelor de undă. În acest caz, o undă  $e^{ikx}$  va suferi o modificare de fază, de la un capăt la celălalt al pachetului, de mărime  $k\Delta x$ , iar o undă  $e^{i(k+\Delta k)x}$  va suferi o schimbare de fază  $(k+\Delta k)\Delta x$ . La capetele din stânga și dreapta ale pachetului  $\phi(x) \simeq 0$ , datorită rezultatului aproximativ nul al suprapunerii componentelor cu diferite numere de undă. Așadar, pentru cele două poziții în fază, avem

$$(k + \Delta k)\Delta x - k\Delta x = \Delta k\Delta x \simeq 2\pi.$$

În trei dimensiuni, trecerea de la spațiul  $\mathbf{r}$  la spațiul  $\mathbf{k}$  se realizează printr-o transformare de tipul (4.109), adică

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int A(\mathbf{k}) e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega(\mathbf{k})t]} d\mathbf{k}, \quad (4.112)$$

unde se presupune că  $\omega(\mathbf{k})$  este o funcție reală (nu avem absorbție). Dezvoltând în serie  $\omega(\mathbf{k})$  în jurul unei valori centrale  $\mathbf{k}_o$  a lui  $\mathbf{k}$ , avem

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}_o) + (\mathbf{k} - \mathbf{k}_o)_i \frac{\partial \omega}{\partial k_i} + \dots \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4.113)$$

Vom presupune că  $A(\mathbf{k})$  are un maxim suficient de pronunțat în apropierea valorii  $\mathbf{k}_o$ , pentru a putea reține numai primii doi termeni din dezvoltarea (4.113). Notând

$$\omega(\mathbf{k}_o) = \omega_o ; \quad \left( \frac{\partial \omega}{\partial k_i} \right)_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_o} = (u_g)_i, \quad (4.114)$$

mai putem scrie

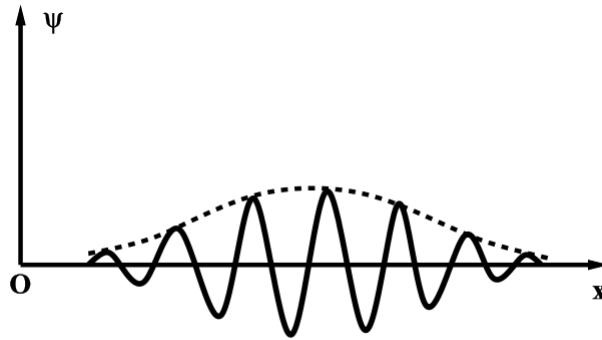
$$\omega(\mathbf{k}) = \omega_o + \mathbf{u}_g \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_o). \quad (4.115)$$

Punând  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_o \cdot \mathbf{r} + (\mathbf{k} - \mathbf{k}_o) \cdot \mathbf{r}$  în (4.112) și utilizând (4.115), avem

$$\psi(\mathbf{r}, t) = e^{i(\mathbf{k}_o \cdot \mathbf{r} - \omega_o t)} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int A(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_o) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{u}_g t)} d\mathbf{k}. \quad (4.116)$$

Aceasta este o undă numită *modulată*, care în centrul pachetului are valoarea  $\exp[i(\mathbf{k}_o \cdot \mathbf{r} - \omega_o t)]$  înmulțită cu o amplitudine-anvelopă ce depinde de spațiu și timp numai în combinația  $\mathbf{r} - \mathbf{u}_g t$  :

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r} - \mathbf{u}_g t) e^{i(\mathbf{k}_o \cdot \mathbf{r} - \omega_o t)}.$$



**Fig. 4.10.**

Forma oscilațiilor și forma acestora într-un grup de unde sunt indicate în Fig.4.10. Anvelopa grupului este constantă de-a lungul traiectoriilor  $\mathbf{r} - \mathbf{u}_g t = \mathbf{r}_o = \text{const.}$ , sau

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \mathbf{u}_g t, \quad (4.117)$$

deci se deplasează cu *viteza de grup*

$$(\mathbf{u}_g)_i = \frac{\partial \omega}{\partial k_i}.$$



În mediile izotrope  $\mathbf{u}_g = (d\omega/dk)\mathbf{s}$ , iar în vid

$$\omega = ck = c(k_i k_i)^{\frac{1}{2}}; \quad \text{deci } u_f = u_g = c.$$

Se poate stabili o relație între viteza de fază și cea de grup a unei unde. Avem :

$$\begin{aligned} u_g &= \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k}(u_f k) = u_f + k \frac{\partial u_f}{\partial k} = \\ &= u_f + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial u_f}{\partial \lambda} / \frac{\partial \left(\frac{1}{\lambda}\right)}{\partial \lambda} = u_f - \lambda \frac{\partial u_f}{\partial \lambda}, \end{aligned} \quad (4.118)$$

numită *legea de dispersie a lui Rayleigh*.

**Aplicație.** Să considerăm un grup de unde luminoase ce se propagă în direcția axei  $Ox$ . Vom presupune că numerele de undă ale undelor ce prin suprapunere dau naștere pachetului sunt cuprinse în intervalul  $k_o - \frac{\Delta k}{2} \leq k \leq k_o + \frac{\Delta k}{2}$ , unde  $\Delta k$  îndeplinește condiția  $|\Delta k| \ll k_o$ . De asemenea, admitem că amplitudinile undelor componente sunt egale între ele, pentru orice  $k$  cuprins în intervalul considerat. Cum în unda luminoasă efectul câmpului  $\mathbf{E}$  este net preponderent față de cel al câmpului  $\mathbf{B}$ , unda ce caracterizează pachetul va fi de forma (4.116), adică

$$E(x, t) = e^{i(k_o x - \omega_o t)} \frac{E_o}{\sqrt{2\pi}} \int_{k_o - \frac{\Delta k}{2}}^{k_o + \frac{\Delta k}{2}} e^{i(k - k_o)(x - u_g t)} dk,$$

unde  $E_o = E(k_o)$ . Utilizând substituția  $k - k_o = \xi$ , mai avem

$$E(x, t) = \frac{E_o}{\sqrt{2\pi}} e^{i(k_o x - \omega_o t)} \int_{-\Delta k/2}^{+\Delta k/2} e^{i\xi(x - u_g t)} d\xi.$$

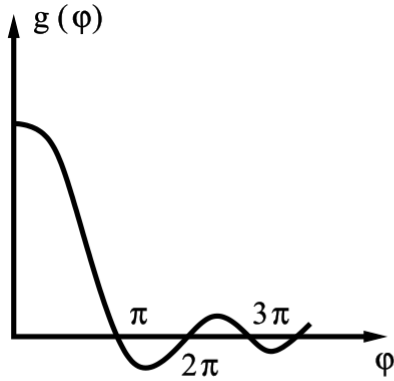
Integrala se calculează cu ușurință, iar rezultatul este

$$E(x, t) = \frac{2E_o}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin \left[ (x - u_g t) \frac{\Delta k}{2} \right]}{x - u_g t} e^{i(k_o x - \omega_o t)}. \quad (4.119)$$

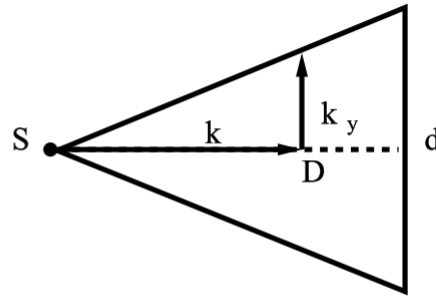
Expresia obținută conține doi factori. Primul,  $\sqrt{\frac{2}{\pi}} E_o e^{i((k_o x - \omega_o t))}$ , reprezintă o undă ce se propagă cu frecvența "purtătoare" medie  $\omega_o$  și este omogenă în spațiu. Amplitudinea undei rezultante variază de la un punct la altul datorită celui de al doilea factor

$$\frac{\sin \left[ (x - u_g t) \frac{\Delta k}{2} \right]}{x - u_g t} \equiv g \left[ (x - u_g t) \frac{\Delta k}{2} \right] \equiv g(\phi). \quad (4.120)$$

Acest factor are un maxim pronunțat pentru  $x = u_g t$  ( $\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\sin \phi}{\phi} = 1$ ), maxim ce nu este fix în spațiu, ci se deplasează cu viteza  $u_g$  (Fig.4.11), deci cu *viteza de grup*.



**Fig. 4.11.**



**Fig. 4.12.**

Lățimea maximului principal, în unități  $\phi$ , este egală cu  $\pi$ , deci extinderea spațială a acestui maxim, la un moment dat, va fi dată de relația  $\Delta \phi = \frac{\Delta k}{2} \cdot \Delta x \simeq \pi$ , de unde

$$\Delta k \cdot \Delta x \simeq 2\pi. \quad (4.121)$$

Dacă se iau în considerație și maximele secundare, avem

$$\Delta k \cdot \Delta x \geq 2\pi. \quad (4.121')$$

Această relație ne furnizează informații privind localizarea spațială a unui semnal electromagnetic. Fie, de pildă,  $\Delta x = d$  (lărgimea transversală a semnalului),  $\Delta k = 2k_y$  și  $D$  distanța față de sursă (Fig.4.12). Avem atunci

$$k_y = k \frac{d}{2D} = \frac{\pi d}{\lambda D},$$

iar din (4.121') rezultă  $2k_y d \geq 2\pi$ , deci

$$d \geq \sqrt{\lambda D}.$$

Se observă că lărgimea transversală a semnalului este cu atât mai mică, cu cât lungimea de undă a unde emise este mai mică. Din acest motiv, pentru transmiterea dirijată a semnalelor undelor electromagnetice (cazul radarului) se utilizează *microunde* ( $\lambda \sim 10^{-3} - 10^{-2}m$ ).

Inegalitatea (4.121') poate fi transcrisă pentru perechea de variabile  $\Delta\omega$  și  $\Delta t$ , pe baza unui raționament similar celui de mai sus : durata  $\Delta t$  a unui semnal, recepționat într-un punct fix din spațiu ( $x = \text{const.}$ ), se va determina prin relația  $\Delta\phi = \frac{\Delta\omega}{2} \cdot \Delta t \simeq \pi$ , sau, dacă ținem seama și de maximele secundare,

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \geq 2\pi. \quad (4.122)$$

Relația (4.122) condiționează lărgimea în frecvență  $\Delta\omega$  a semnalului de intervalul de timp  $\Delta t$  necesar detecției sale. De pildă, în cazul semnalelor radio, dacă luăm pentru  $\Delta t$  limita de audibilitate a urechii omului ( $\Delta t \simeq 5 \cdot 10^{-5}s$ ), rezultă  $\Delta\omega \simeq 4\pi \cdot 10^4 Hz$ . Având în vedere că  $\omega_o \gg \Delta\omega$ , rezultă că în transmisiile radio frecvența  $\omega_o$  a unde "purtătoare" trebuie să fie mult mai mare decât cea a semnalelor sonore transmise.

În concluzie, cu cât un grup de unde este mai concentrat în spațiu, cu atât este mai larg intervalul  $\Delta k$ , deci va conține o plajă mai largă de unde monocromatice diferite. De asemenea, cu cât grupul de unde este mai concentrat în durată, cu atât este mai dispersat în frecvență.

### Teoria clasică a dispersiei undelor electromagnetice

Așa cum am arătat cu alt prilej, există unele fenomene — între care cel de dispersie a undelor electromagnetice — pentru explicarea

căroră teoria lui Maxwell se dovedește nesatisfăcătoare. O teorie corectă a fenomenului de dispersie nu putea fi elaborată decât ținând seama de structura discontinuă a substanței. Acest lucru a fost realizat de **H.A.Lorentz**, pe baza modelului clasic al oscilatorului elementar.

Să considerăm un mediu neutru din punct de vedere electric, liniar, omogen și izotrop, în care se propagă o undă electromagnetică plană. Fie  $N$  numărul de atomi din unitatea de volum, fiecare atom fiind presupus a fi format dintr-un electron cu sarcina  $-e$  și masa  $m$ , legat cvasielastice de nucleul pozitiv. Asupra fiecărui electron vor acționa trei categorii de forțe :

a) Forța cvasielastică  $-m\omega_o^2\mathbf{r}$ , unde  $\omega_o$  este pulsația proprie a oscilatorului ;

b) Forța de frânare  $-m\gamma\dot{\mathbf{r}}$ , echivalentă cu una de frecare, datorată câmpului electromagnetic propriu ;

c) Forța electromagnetică  $\mathbf{F}_L = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ . Modelul ales fiind, însă, nerelativist ( $v \ll c$ ), componenta magnetică a forței electromagnetice poate fi neglijată în raport cu cea electrică. Într-adevăr, admitând că permitivitatea și permeabilitatea mediului sunt apropiate de cele ale vidului ( $\epsilon \sim \epsilon_o$ ,  $\mu \sim \mu_o$ ) (cazul gazelor), avem :

$$|\mathbf{v} \times \mathbf{B}| = v\mu_o H \sin \phi = \frac{v}{c^2} \frac{H}{\epsilon} \sin \phi \ll |\mathbf{E}|.$$

Ecuția diferențială de mișcare a electronului va fi atunci

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -m\omega_o^2\mathbf{r} - m\gamma\dot{\mathbf{r}} - e\mathbf{E},$$

sau

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma\dot{\mathbf{r}} + \omega_o^2\mathbf{r} = - \frac{e}{m} \mathbf{E}. \quad (4.123)$$

Pentru a integra această ecuație, vom căuta soluția de forma

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o e^{-i\omega t}. \quad (4.124)$$

Ținând seama de faptul că unda este plană, adică  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{B}$  sunt de forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_o e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} ; \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_o e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)},$$

găsim după calcule simple

$$\mathbf{r}_o = \frac{e}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_o^2 + i\omega\gamma} \mathbf{E}_o e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}},$$

deci

$$\mathbf{r} = \frac{e}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_o^2 + i\omega\gamma} \mathbf{E}. \quad (4.125)$$

De aici deducem viteza electronului  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = -i\omega\mathbf{r}$ , prin urmare putem scrie expresia densității curentului de conducție

$$\mathbf{j} = -N e \mathbf{v} = i N e \omega \mathbf{r} = i \frac{Ne^2}{m} \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_o^2 + i\omega\gamma} \mathbf{E}. \quad (4.126)$$

Înlocuind această expresie în ecuația lui Maxwell  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_o \left( \mathbf{j} + \epsilon_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$ , obținem

$$\nabla \times \mathbf{B} = -i\omega\epsilon_o\mu_o \left( 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_o} \frac{1}{\omega^2 - \omega_o^2 + i\omega\gamma} \right) \mathbf{E}. \quad (4.127)$$

Modelul de mediu ales de noi fiind de tip semiconductor, permitivitatea complexă se va exprima prin (4.68), cu observația că în cazul de față, datorită alegerii semnelui fazei vectorilor de câmp, vom avea  $\tilde{\epsilon} = \epsilon + i\frac{\lambda}{\omega}$ . (O astfel de alegere este neesențială!) Cum  $\mathbf{j} = \lambda\mathbf{E}$ , avem din (4.126)

$$\lambda = i \frac{Ne^2}{m} \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_o^2 + i\omega\gamma} \quad (4.128)$$

și atunci

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon \left( 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon} \frac{1}{\omega_o^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \right). \quad (4.129)$$

Pe de altă parte, din definiția indicelui de refracție al undei ce se propagă în mediul nostru rezultă

$$\tilde{n} = \frac{c}{\tilde{u}} = c\sqrt{\tilde{\epsilon}\mu} \approx \left( 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_o} \frac{1}{\omega_o^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.130)$$

relație numită *ecuația de dispersie* pentru modelul studiat.

Observând că indicele de refracție este complex, să alegem  $\tilde{n} = n_1 + in_2$ . Avem atunci

$$\tilde{n}^2 = n_1^2 - n_2^2 + 2in_1n_2 = 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_o} \frac{\omega_o^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2},$$

sau, dacă identificăm părțile reală și imaginară

$$\begin{aligned} n_1^2 - n_2^2 &= 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_o} \frac{\omega_o^2 - \omega^2}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} ; \\ 2n_1n_2 &= \frac{Ne^2}{m\epsilon_o} \frac{\omega\gamma}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} . \end{aligned} \quad (4.131)$$

Ecuațiile (4.131) au fost obținute pentru  $N$  oscilatori cu frecvența proprie  $\omega_o$ . În cazul a  $\mathcal{N}$  tipuri de oscilatori, formulele de mai sus se vor scrie

$$\begin{aligned} n_1^2 - n_2^2 &= 1 + \frac{e^2}{m\epsilon_o} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{N_i (\omega_i^2 - \omega^2)}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} ; \\ 2n_1n_2 &= \frac{e^2}{m\epsilon_o} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{N_i \omega \gamma}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} , \end{aligned} \quad (4.132)$$

în care  $\omega_i$  este pulsația proprie a oscilatorilor de tipul  $i$ , din care  $N_i$  se află în unitatea de volum.

Având în vedere relația dintre  $n$  și  $k$ , un indice de refracție complex va implica un număr de undă complex :  $\tilde{k} = k_1 + ik_2$ . Din acest motiv, discuția ce urmează este valabilă atât pentru  $n$ , cât și pentru  $k$ . Dacă admitem că propagarea are loc în direcția axei  $Ox$  și observăm că vectorul de câmp  $\mathbf{E}$  este proporțional cu  $\exp(ikx)$ , distingem următoarele trei cazuri:

1)  $k_1 = 0$  ; numărul de undă este pur imaginar, iar unda se atenuază rapid, fără a se propaga în mediu (*undă evanescentă*).

2)  $k_2 = 0$  ; unda se propagă fără atenuare.

3)  $k_1, k_2 \neq 0$  ; unda se propagă cu o amplitudine ce descrește exponențial cu  $x$ , atenuarea fiind cu atât mai puternică cu cât  $k_2$  este mai mare.

De aici rezultă, ca o primă concluzie, faptul că partea imaginară  $k_2$  a lui  $\tilde{k}$  descrie absorbția unei electromagnetice în mediu, absorbție datorată energiei disipate prin efectul frânării electronului în câmpul electromagnetic propriu. Unda se amortizează în sensul pozitiv sau negativ al axei  $Ox$ , după cum  $k_2 > 0$  sau  $k_2 < 0$ .

Ca o aplicație imediată, să admitem că mediul nostru este o plasmă neutră (metal, ionosferă) cu  $N$  electroni în unitatea de volum. Neglijând forțele cvasielastice ( $\omega_o = 0$ ) și de frecare ( $\gamma = 0$ ), relația (4.130) se reduce la

$$n^2 = 1 - \frac{Ne^2}{m\epsilon_o} \frac{1}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} < 1, \quad (4.133)$$

unde expresia  $\omega_p^2 = Ne^2/m\epsilon_o$  se numește *pulsația plasmiei*. Relația (4.133) este utilă, de pildă, la studiul reflexiei și refracției fasciculelor de raze X la suprafața unui metal (plasmă neutră). Astfel, dacă  $\phi$  și  $\theta$  sunt unghiul de incidență, respectiv de refracție, avem :

$$\frac{\sin^2 \phi}{\sin^2 \theta} = n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}.$$

Dacă pulsația  $\omega$  a radiației X este inferioară pulsației  $\omega_p$  a plasmiei, indicele de refracție  $n$  devine pur imaginar, prin urmare fasciculul de raze X suferă fenomenul de *reflexie totală*.

Revenind la ecuația de dispersie (4.130), s-o aplicăm în cazul gazelor și al vaporilor. Întrucât aici densitatea  $N$  a atomilor polarizați este mică, putem dezvolta în serie cel de al doilea membru. Avem :

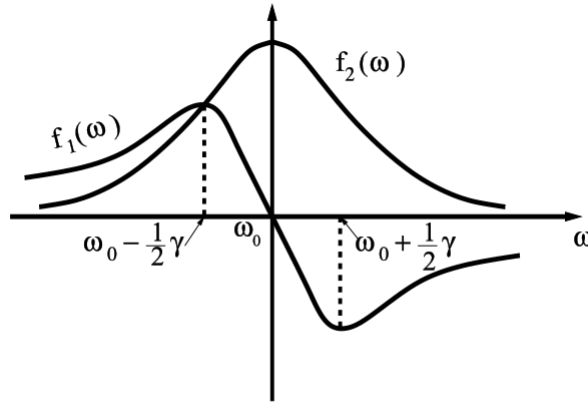
$$\tilde{n} = n_1 + in_2 \simeq 1 + \frac{Ne^2}{2m\epsilon_o} \frac{1}{\omega_o^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}, \quad (3.134)$$

de unde rezultă

$$\begin{aligned} n_1 - 1 &= f_1(\omega) = \frac{Ne^2}{2m\epsilon_o} \frac{\omega_o^2 - \omega^2}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} ; \\ n_2 &= f_2(\omega) = \frac{Ne^2}{2m\epsilon_o} \frac{\omega\gamma}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} . \end{aligned} \quad (4.135)$$

Reprezentarea grafică a funcțiilor  $f_1(\omega)$  și  $f_2(\omega)$  (vezi Fig.4.13) ne permite să tragem următoarele concluzii :

Pentru  $\omega = \omega_o$  (pulsatie de rezonanță), funcția  $f_1(\omega)$  se anulează, iar  $f_2(\omega)$  prezintă un maxim pronunțat. Din cele precedente știm că partea imaginară a indicelui de refracție complex (sau, echivalent, a numărului de undă complex) descrie absorbția în mediu, ceea ce înseamnă că în regiunea vecină cu  $\omega_o$  mediul este *opac* pentru unda incidentă.



**Fig. 4.13.**

Funcția  $f_1(\omega)$  admite un maxim pentru  $\omega = \omega_{max} = \omega_o - \frac{1}{2}\gamma$  și un minim pentru  $\omega = \omega_{min} = \omega_o + \frac{1}{2}\gamma$ , valori ce se găsesc ușor egalând cu zero derivata lui  $f_1(\omega)$  în raport cu  $\omega$ . Prin urmare, în domeniul de frecvențe  $\omega < \omega_o - \frac{1}{2}\gamma$  ;  $\omega > \omega_o + \frac{1}{2}\gamma$ , partea reală a indicelui de refracție (de fapt  $n_1 - 1$ ) crește cu creșterea lui  $\omega$ , fenomen cunoscut sub numele de *dispersie normală*. În domeniul  $\omega_o - \frac{1}{2}\gamma < \omega < \omega_o + \frac{1}{2}\gamma$ , deci în vecinătatea frecvenței de rezonanță, indicele de refracție scade cu creșterea frecvenței. O astfel de dispersie se numește *anomală*.

Conchidem, așadar, că substanțele au - în general vorbind - un domeniu limitat de transparență pentru undele electromagnetice, domeniu a cărui lărgime depinde de frecvența undelor incidente. O asemenea concluzie diferă de cea dedusă din teoria lui Maxwell, care consideră mediile dielectrice (de pildă) ca fiind transparente pentru undele electromagnetice, indiferent de frecvența acestora. Deși teoria lui Lorentz



are la bază un model simplist de oscilator atomic, motiv pentru care se dovedește a fi în concordanță cu experimentul doar în unele cazuri (vapori și gaze ideale), concluzia de mai sus rămâne, în esență, valabilă.

### Observație

Legea de dispersie a lui Rayleigh (4.118) se mai poate scrie sub forma

$$u_g = \frac{1}{\left(\frac{dk}{d\omega}\right)} = \frac{1}{\frac{n}{c} + \frac{\omega}{c} \frac{dn}{d\omega}} = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}}.$$

Pentru pulsații  $\omega$  corespunzătoare dispersiei normale, derivata  $dn/d\omega$  este pozitivă și, admitând că  $n > 1$ , putem scrie

$$u_g < u_f < c.$$

În vecinătatea pulsației de rezonanță  $\omega_o$ , derivata  $dn/d\omega$  este negativă (vezi Fig.4.13), ceea ce ar duce la concluzia  $u_g > c$ . O astfel de concluzie nu poate fi corectă, pentru simplul motiv că în regiunea de absorbție indicele de refracție este pur imaginar, ceea ce înseamnă că definiția  $u_g = \partial\omega/\partial\mathbf{k}$  - în această regiune - își pierde sensul. În general, deci, avem  $u_g \leq c$ .

Cât privește însă viteza de fază  $u_f$ , aceasta poate lua valori superioare lui  $c$ . Ca exemplu, să transcriem relația de dispersie (4.133) pentru undele electromagnetice într-o plasmă neutră (ionosferă) :

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \omega^2 n^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2.$$

Avem :

$$u_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} = c^2 \frac{k}{\omega} < c ; \quad u_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{c^2 + \frac{\omega_p^2}{k^2}} > c,$$

căci  $ck < \omega$ . Din cele de mai sus rezultă, de asemenea :  $u_g u_f = c^2$ .

Am obținut, între altele, un rezultat notabil : viteza de fază a unei unde electromagnetice *poate* depăși viteza luminii în vid. Subliniem că această concluzie nu este în contradicție cu teoria relativității, după cum se va vedea în Vol. II .

### Relații de dispersie

O formulare mai riguroasă a teoriei dispersiei a fost dată în deceniul al treilea al secolului trecut de **H.A.Kramers** și **R.Kronig** și se bazează pe teoria funcțiilor de o variabilă complexă.

Vom pleca de la formula lui Cauchy

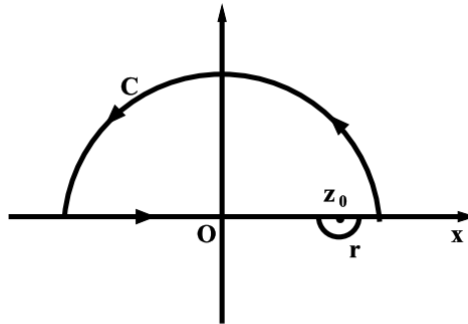
$$f(z_o) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(x) dx}{x - z_o}, \quad (4.136)$$

unde  $z_o$  este un punct interior curbei  $C$ . Să alegem drept contur de integrare semicercul de rază infinită din planul complex superior, închis prin însăși axa reală, ce înconjoară punctul  $z_o$  (Fig.4.14). Dacă  $|f(z)|$  tinde la zero destul de repede la distanțe mari de origine, integrala pe semicerc tinde la zero și (4.136) devine

$$f(z_o) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x) dx}{x - z_o}. \quad (4.137)$$

Fie  $z_o = x_o + i\epsilon$  ( $\epsilon > 0$ ), unde  $x_o$  este un pol situat pe axa reală. În acest caz, (4.137) se mai scrie

$$f(x_o) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x) dx}{x - (x_o + i\epsilon)}. \quad (4.138)$$



**Fig. 4.14.**

Ocolind polul  $x_o$  cu un semicerc  $\Gamma$  de rază  $\rho$ , astfel încât  $x_o + i\epsilon$  să rămână în interiorul conturului, putem exprima funcția  $f(x_o)$  în felul

următor

$$f(x_o) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \frac{f(x) dx}{x - x_o} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{x_o - \rho} \frac{f(x) dx}{x - x_o} + \right. \\ \left. + \int_{x_o + \rho}^{+\infty} \frac{f(x) dx}{x - x_o} \right] + \frac{1}{2\pi i} \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{x_o - \rho}^{x_o + \rho} \frac{f(x) dx}{x - x_o} . \quad (4.139)$$

Prin definiție, limita expresiei conținută în paranteza pătrată din (4.139) se notează

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{x_o - \rho} \frac{f(x) dx}{x - x_o} + \int_{x_o + \rho}^{+\infty} \frac{f(x) dx}{x - x_o} \right] = P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x) dx}{x - x_o} \quad (4.140)$$

și se numește *valoarea principală* a integralei în punctul  $x = x_o$ . În ceea ce privește ultima integrală din (4.139), aceasta se calculează ușor efectuând schimbarea de variabilă  $x - x_o = \rho e^{i\theta}$ . Avem :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{x_o - \rho}^{x_o + \rho} \frac{f(x) dx}{x - x_o} = \\ = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{f(x_o + \rho e^{i\theta})}{\rho e^{i\theta}} i \theta \rho e^{i\theta} d\theta = \pi i f(x_o),$$

prin urmare

$$f(x_o) = \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x) dx}{x - x_o} . \quad (4.141)$$

Dacă scriem funcțiile  $f(x)$  și  $f(x_o)$  sub formă complexă

$$f(x) = A(x) + iB(x) ; \quad f(x_o) = A(x_o) + iB(x_o),$$

din (4.141) rezultă

$$A(x_o) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B(x) dx}{x - x_o} ; \quad B(x_o) = - \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(x) dx}{x - x_o} , \quad (4.142)$$

numite *relațiile lui Hilbert*.

Pentru a aplica aceste relații în cazul dispersiei, să alegem ca variabilă  $x$  pulsația  $\omega$ , iar ca funcție  $f(x)$

$$f(\omega) = f_1(\omega) + if_2(\omega) = A(\omega) + iB(\omega), \quad (4.143)$$

unde  $f_1(\omega)$  și  $f_2(\omega)$  sunt definite de (4.135). Deducem atunci

$$f_1(\omega_o) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_2(\omega) d\omega}{\omega - \omega_o}; \quad f_2(\omega_o) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_1(\omega) d\omega}{\omega - \omega_o},$$

sau

$$\begin{aligned} n_1(\omega_o) - 1 &= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n_2(\omega) d\omega}{\omega - \omega_o}; \\ n_2(\omega_o) &= -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[n_1(\omega) - 1] d\omega}{\omega - \omega_o}, \end{aligned} \quad (4.144)$$

formule care se numesc *relațiile de dispersie* sau *relațiile Kramers - Kronig*. Aceste relații au importanță și în alte domenii ale fizicii (vezi lista de referințe bibliografice).

Din relațiile Kramers - Kronig rezultă că, pentru a avea loc dispersia radiațiilor electromagnetice, aceasta trebuie să fie însoțită (într-o măsură mai mare sau mai mică) de absorbție. Într-adevăr, dacă absorbția lipsește ( $n_2 = 0$ ), din (4.144) obținem  $n_1 = n = 1$ , iar viteza de fază este

$$u_f = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} = c,$$

ceea ce exprimă *lipsa* dispersiei.

### Dispersia în cristale

Să reluăm problema propagării undelor electromagnetice în medii anizotrope, discutată în §4.7, pentru a pune în evidență caracteristicile fenomenului de dispersie în astfel de medii. Limitându-ne la undele luminoase, să scriem faza unei unde plane sub forma

$$\phi = -\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = -\omega t + k\mathbf{s} \cdot \mathbf{r} = -\omega t + \frac{\omega}{c} \psi(x, y, z),$$

unde funcția  $\psi$  se numește *eiconal*. Gradientul eiconalului este

$$\nabla\psi = \mathbf{n} ; \quad \mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}. \quad (4.145)$$

Modulul vectorului  $\mathbf{n}$  este indicele de refracție al mediului, considerat aici ca transparent. Într-un mediu anizotrop,  $|\mathbf{n}|$  depinde și de direcție, spre deosebire de mediile izotrope în care  $|\mathbf{n}|$  depinde numai de frecvență.

Să stabilim ecuația ce explică forma razelor luminoase. Conform principiului lui Fermat, pe traiectoria unei raze între două puncte A și B este minimă integrala

$$\psi = \int_A^B \mathbf{n} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B n \, ds,$$

adică

$$\delta\psi = \int_A^B [\delta n(ds) + n\delta(ds)] = 0. \quad (4.146)$$

Dacă  $\boldsymbol{\tau}$  este versorul tangentei la rază, putem scrie

$$\delta n = \delta\mathbf{r} \cdot \nabla n ; \quad \delta(ds) = \boldsymbol{\tau} \cdot d(\delta\mathbf{r}).$$

Înlocuind în (4.146) și integrând prin părți, obținem

$$\delta\psi = \int_A^B \left( \nabla n - \frac{d(n\boldsymbol{\tau})}{ds} \right) \delta\mathbf{r} \cdot (ds) = 0 ,$$

de unde rezultă

$$\frac{d(n\boldsymbol{\tau})}{ds} = \nabla n,$$

sau, dacă explicităm derivata și scriem  $dn/ds = \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla n$ ,

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{1}{n} [\nabla n - \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla n)] , \quad (4.147)$$

care este ecuația căutată. Dar  $d\boldsymbol{\tau}/ds = \boldsymbol{\nu}/\rho$ , unde  $\rho$  este raza de curbură a curbei, iar  $\boldsymbol{\nu}$  versorul normalei principale, ortogonal la  $\boldsymbol{\tau}$  (triedrul lui Frenet). Obținem atunci

$$\frac{1}{\rho} = \nu \cdot \frac{\nabla n}{n} , \quad (4.148)$$

prin urmare *raza este curbată în direcția creșterii indicelui de refracție.*

Viteza de propagare a razei luminoase este viteza de grup  $\mathbf{u}_g = \partial\omega/\partial\mathbf{k}$ , a cărei orientare este dată de versorul  $\boldsymbol{\tau}$ .

Să stabilim legea dispersiei radiațiilor electromagnetice în mediile anizotrope. În acest scop vom apela la ecuația (4.99), pe care o vom scrie sub forma

$$\mathbf{D} = \epsilon[\mathbf{E} - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{E})\mathbf{s}] ,$$

sau, în proiecția pe direcția  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ),

$$D_i = \epsilon[E_i - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{E})s_i] = \epsilon_{ik}E_k .$$

Cum  $\epsilon_r \sim u^2 = \epsilon/\epsilon_o$  ;  $\epsilon_{ik} = \epsilon_o(\epsilon_r)_{ik}$ , mai avem

$$n^2[E_i - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{E})s_i] = (\epsilon_r)_{ik}E_k .$$

Dar  $n\mathbf{s} = \mathbf{n}$ , deci

$$n^2E_i - (n_kE_k)n_i = (\epsilon_r)_{ik}E_k ,$$

sau

$$[n^2\delta_{ik} - n_in_k - (\epsilon_r)_{ik}]E_k = 0 . \quad (4.149)$$

Pentru ca ecuația (4.149) să admită soluții nebanale, este necesar să avem

$$|n^2\delta_{ik} - n_in_k - (\epsilon_r)_{ik}| = 0 . \quad (4.150)$$

Dacă  $x, y, z$  sunt direcțiile principale ale tensorului  $(\epsilon_r)_{ik}$ , iar  $(\epsilon_r)_x, (\epsilon_r)_y, (\epsilon_r)_z$  permitivitățile (relative) principale, rezolvând determinantul (4.150) ajungem la ecuația

$$n^2[(\epsilon_r)_xn_x^2 + (\epsilon_r)_yn_y^2 + (\epsilon_r)_zn_z^2] -$$

$$\begin{aligned}
& -\{n_x^2(\epsilon_r)_x[(\epsilon_r)_y + (\epsilon_r)_z] + n_y^2(\epsilon_r)_y[(\epsilon_r)_x + (\epsilon_r)_z] + \\
& + n_z^2(\epsilon_r)_z[(\epsilon_r)_x + (\epsilon_r)_y]\} + (\epsilon_r)_x(\epsilon_r)_y(\epsilon_r)_z = 0 .
\end{aligned} \tag{4.151}$$

Această ecuație dă sub formă implicită legea dispersiei, adică dependența de frecvență a vectorului de undă. Pentru o direcție dată a lui  $\mathbf{n}$  (deci a lui  $\mathbf{k}$ ), ea reprezintă o ecuație pătratică pentru  $n^2$  cu coeficienți reali. De aceea, fiecărei direcții  $\mathbf{n}$  îi corespund, în general, două valori absolute distincte ale vectorului de undă.

Luând  $(\epsilon_r)_i$  constante, ecuația (4.151) determină în coordonatele  $n_i$  o anumită suprafață, numită *suprafața vectorilor de undă* sau *suprafața normalelor*.

Aceste investigații arată că ecuația (4.151) ne este altceva decât o altă formă de scriere a ecuației lui Fresnel, întâlnită în §4.7, scrisă astfel încât să pună în evidență fenomenul de dispersie.

După cum știm, direcția razelor luminoase este dată de vectorul viteză de grup  $\mathbf{u}_g = \partial\omega/\partial\mathbf{k}$ . În mediul izotrop direcția sa coincide cu direcția lui  $\mathbf{k}$ ; în mediul anizotrop, însă, direcțiile celor doi vectori nu coincid. Fie  $\boldsymbol{\sigma}$  un vector, numit *vectorul razei*, care coincide ca direcție cu viteza de grup și al cărui modul se definește prin

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = 1 . \tag{4.152}$$

Să considerăm un fascicul monocromatic care diverge dintr-o sursă punctiformă. Valoarea eiconalului este

$$\psi = \int \mathbf{n} \cdot d\mathbf{s} = \int \frac{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{\sigma} ds = \int \frac{ds}{\sigma} .$$

Într-un mediu omogen,  $\sigma$  este constant de-a lungul razei, astfel că  $\psi = L/\sigma$ , unde  $L$  este lungimea segmentului de rază. Deci, dacă de-a lungul fiecărei raze a fasciculului luăm un segment proporțional cu  $\sigma$ , obținem o suprafață numită *suprafața razelor*, ale cărei puncte au aceeași fază.

Scriind condensat ecuația (4.151) sub forma  $f(k_x, k_y, k_z) = 0$ , avem

$$\frac{\partial\omega}{\partial k_i} = \frac{\partial f}{\partial k_i} / \frac{\partial f}{\partial\omega} ,$$

prin urmare componentele vitezei de grup sunt proporționale cu derivatele  $\partial f / \partial k_i$ , deci cu derivatele  $\partial f / \partial n_i$ . Cum vectorul  $\partial f / \partial \mathbf{n}$  este dirijat după normala la suprafața  $f = 0$ , conchidem că direcția vectorului  $\boldsymbol{\sigma}$  este dată, într-un anumit punct, de normala la suprafața vectorilor de undă în acel punct.

### Problemă

Se consideră că într-un metal există  $N$  purtători de sarcină în unitatea de volum, fiecare având masa  $m$ , sarcina  $e$  și satisfăcând ecuația

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{m}{\tau} \mathbf{v} = e\mathbf{E} ,$$

unde  $\tau$  este timpul de relaxare. Se cere :

- a) Să se determine expresia conductivității electrice complexe  $\tilde{\lambda}$ .
- b) Să se scrie ecuațiile de dispersie pentru conductivitate.
- c) Să se explice în ce mod este corelată  $Re(\lambda)$  de pierderea de energie prin efect Joule.

### §4.9. Propagarea undelor electromagnetice prin ghiduri de undă

Prin *ghiduri de undă* înțelegem dispozitive de formă tubulară, metalice sau nemetalice, de secțiune constantă sau variabilă, utilizate pentru *transmiterea dirijată, la distanță*, a undelor electromagnetice. Cele mai utilizate sunt ghidurile metalice de secțiune constantă, umplute cu un dielectric (în general gazos, de pildă aerul), sau în care s-a realizat vid. Denumirea ghidului este dată de forma secțiunii transversale a tubului, aceasta putând fi : circulară, dreptunghiulară, eliptică etc. Secțiunile unor ghiduri au forme speciale, în funcție de destinația acestora.

Ghidurile de undă sunt utilizate pe scară largă în electronică și radiotehnică, în fizica nucleară, precum și în alte domenii (de ex. în tehnica militară).

Există diverse procedee de abordare teoretică a problemei transmisiei undelor electromagnetice prin ghiduri de undă. Noi vom utiliza



procedeul cel mai simplu, care constă în utilizarea directă a ecuațiilor lui Maxwell, urmând ca la sfârșitul paragrafului să oferim cititorului o formulare alternativă.

### A. Ghiduri de undă de secțiune rectangulară

Vom presupune că secțiunea transversală a ghidului este dreptunghiulară, latura mare a dreptunghiului fiind  $a$ , iar cea mică  $b$ . De asemenea, vom considera peretele interior al ghidului ca fiind din metal (sau metalizat) foarte bun conductor ( $\lambda \rightarrow \infty$ ), iar dielectricul din interiorul ghidului este aerul ( $\epsilon \sim \epsilon_o$ ,  $\mu \sim \mu_o$ ).

Ecuațiile ce vor descrie câmpul electromagnetic în interiorul ghidului vor fi, evident, ecuațiile lui Maxwell, completate cu condițiile la limită și relațiile de material (ecuațiile constitutive). Scriind ecuațiile câmpului electromagnetic sub forma (4.1')

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} ; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 ;$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_o \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} ; \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 ,$$

și aplicând operatorul *rotor* ecuațiilor de evoluție, găsim printr-un procedeu deja cunoscut

$$\Delta \mathbf{E} - \epsilon_o \mu_o \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 ; \quad \Delta \mathbf{H} - \epsilon_o \mu_o \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 . \quad (4.153)$$

Geometria secțiunii transversale a ghidului indică utilizarea coordonatelor carteziane ortogonale. Admițând că axa ghidului este orientată după axa  $Oz$ , soluțiile ecuațiilor (4.153) vor fi de forma

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z, t) &= \mathbf{E}(x, y) e^{i(\omega t - k_z z)} ; \\ \mathbf{H}(x, y, z, t) &= \mathbf{H}(x, y) e^{i(\omega t - k_z z)} . \end{aligned} \quad (4.154)$$

Introducând soluțiile (4.154) în (4.153) și observând că  $\partial/\partial t \rightarrow i\omega$ ,  $\Delta_z \rightarrow -k_z^2$ , obținem pentru  $\mathbf{E}(x, y)$  și  $\mathbf{H}(x, y)$  ecuațiile

$$(\Delta_2 + \alpha^2) \mathbf{E}(x, y) = 0 ; \quad (\Delta_2 + \alpha^2) \mathbf{H}(x, y) = 0 , \quad (4.155)$$

unde am notat

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 = k^2 - k_z^2, \quad (4.156)$$

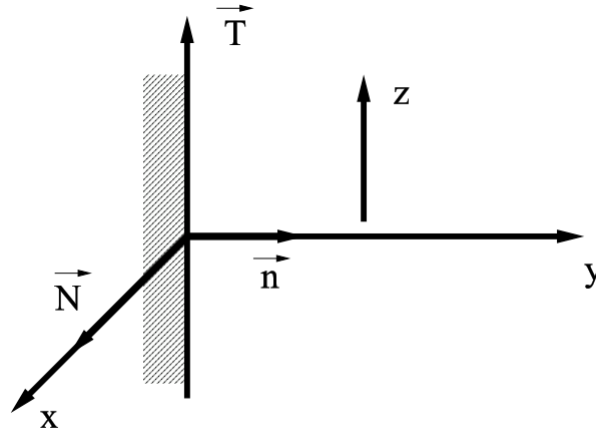
iar

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

este *laplaceanul bidimensional*.

Pentru determinarea soluțiilor ecuațiilor de propagare (4.155), ele trebuie completate cu *condițiile la limită*. Acestea se obțin din ecuațiile de trecere (3.40), pe care le transcriem mai jos

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma; \quad E_{2T} - E_{1T} = 0; \quad B_{2n} - B_{1n} = 0; \quad H_{2T} - H_{1T} = i_N.$$



**Fig. 4.15.**

Alegând planul  $xOz$  ca reprezentând unul dintre pereții (metalici) interiori ai ghidului, iar versorii  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{n}$  așa cum este indicat în Fig.4.15, a doua și a treia dintre ecuațiile de trecere conduc la

$$(\mathbf{E} - \mathbf{E}_c) \cdot \mathbf{n} = 0; \quad (\mathbf{B} - \mathbf{B}_c) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (4.157)$$

unde  $\mathbf{E}_c$ ,  $\mathbf{B}_c$  sunt vectorii de câmp în interiorul peretelui conductor. Peretele fiind - conform ipotezei - un foarte bun conductor, potrivit

legii lui Ohm  $\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}$ , pentru  $\mathbf{j}$  finit și  $\lambda \rightarrow \infty$ , trebuie să avem  $\mathbf{E}_c = 0$ , ceea ce implică  $\mathbf{B}_c = 0$ . Rămâne, deci

$$E_T|_S = 0 \rightarrow E_z|_S = 0 \text{ (sau } E_x|_S = 0 \text{)} ;$$

$$H_n|_S = 0 \text{ (sau } \frac{\partial H_z}{\partial n} \Big|_S = 0 \text{)} . \quad (4.158)$$

Ultima relație se obține proiectând pe axa  $x$  ecuația lui Maxwell  $\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  și apoi aplicând-o la peretele ghidului (vezi Fig.4.15).

Combinând soluțiile cu condițiile la limită, se constată că în ghid putem avea următoarele tipuri de unde:

a) Unde de tip *electric* (E) sau *transversal-magnetic* (TM), caracterizate prin :  $H_z = 0$  peste tot în interiorul ghidului, cu condiția la limită  $E_z|_S = 0$  ;

b) Unde de tip *magnetic* (M) sau *transversal electric* (TE), caracterizate prin  $E_z = 0$  peste tot în interiorul ghidului, cu condiția la limită  $\frac{\partial H_z}{\partial n} \Big|_S = 0$  ;

c) Unde de tip *transversal electro-magnetic*, pentru care  $E_z = 0$ ,  $H_z = 0$  peste tot în interiorul ghidului. Aceste unde nu prezintă un interes deosebit pentru studiul nostru.

### Unde de tip electric (E)

Pentru a determina soluția problemei, vom proiecta pe axele  $Ox$  și  $Oy$  ecuațiile de evoluție ale lui Maxwell :

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -i\omega\mu_o H_x ; \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -i\omega\mu_o H_y ;$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = i\omega\epsilon_o E_x ; \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = i\omega\epsilon_o E_y ,$$

care, având în vedere că  $\partial/\partial z \rightarrow -ik_z$  și  $H_z = 0$ , se mai scriu

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + ik_z E_y = -i\omega\mu_o H_x ; \quad ik_z E_x + \frac{\partial E_z}{\partial x} = i\omega\mu_o H_y ;$$

$$k_z H_y = \epsilon_o \omega E_x ; \quad -k_z H_x = \epsilon_o \omega E_y .$$

Se constată că putem exprima componentele de câmp în funcție de derivatele parțiale ale unei singure componente, anume  $E_z$ . Utilizând notația (4.156), avem :

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{ik_z}{\alpha^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} ; & E_y &= -\frac{ik_z}{\alpha^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} ; \\ H_x &= \frac{i\epsilon_o\omega}{\alpha^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} ; & H_y &= -\frac{i\epsilon_o\omega}{\alpha^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} ; & H_z &= 0 . \end{aligned} \quad (4.159)$$

Componenta de câmp  $E_z$  se determină ca soluție a ecuației (4.155)<sub>1</sub>, în proiecție pe direcția  $z$

$$(\Delta_2 + \alpha^2)E_z(x, y) = 0 .$$

Utilizând metoda separării variabilelor, vom scrie soluția sub forma

$$E_z(x, y) = X(x) Y(y) , \quad (4.160)$$

care conduce la ecuațiile

$$X'' + \alpha_1^2 X = 0 ; \quad Y'' + \alpha_2^2 Y = 0 , \quad (4.161)$$

unde

$$\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 . \quad (4.162)$$

Soluțiile ecuațiilor (4.161) sunt de forma

$$X(x) = A \sin \alpha_1 x + B \cos \alpha_1 x ; \quad Y(y) = C \sin \alpha_2 y + D \cos \alpha_2 y ,$$

așadar soluția  $E_z(x, y)$  este de forma

$$E_z(x, y) = \text{const.} \frac{\sin}{\cos} (\alpha_1 x) \frac{\sin}{\cos} (\alpha_2 y) . \quad (4.163)$$

Constantele se determină din condiția pe frontieră  $E_z|_S = 0$ , care se traduce prin :  $E_z = 0$  pentru  $x = (0, a) ; y = (0, b)$ . De aici deducem, pe de o parte  $B = D = 0$ , iar pe de alta

$$\alpha_1 = \frac{n_1\pi}{a} ; \quad \alpha_2 = \frac{n_2\pi}{b} , \quad (4.164)$$

de unde

$$E_z(x, y) = E_o \sin \frac{n_1 \pi}{a} x \sin \frac{n_2 \pi}{b} y,$$

și atunci soluția căutată capătă forma

$$E_z(x, y, z, t) = E_o \sin \frac{n_1 \pi}{a} x \sin \frac{n_2 \pi}{b} y e^{i(\omega t - k_z z)}. \quad (4.165)$$

Aceste considerații ne permit să scriem expresiile componentelor vectorilor de câmp în unda de tip (E). Utilizând (4.159), avem în definitiv

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{ik_z}{\alpha^2} E_o \frac{n_1 \pi}{a} \cos \frac{n_1 \pi}{a} x \sin \frac{n_2 \pi}{b} y e^{i(\omega t - k_z z)} ; \\ E_y &= -\frac{ik_z}{\alpha^2} E_o \frac{n_2 \pi}{b} \sin \frac{n_1 \pi}{a} x \cos \frac{n_2 \pi}{b} y e^{i(\omega t - k_z z)} ; \\ E_z &= E_o \sin \frac{n_1 \pi}{a} x \sin \frac{n_2 \pi}{b} y e^{i(\omega t - k_z z)} ; \\ H_x &= \frac{i\omega\epsilon_o}{\alpha^2} E_o \frac{n_2 \pi}{b} \sin \frac{n_1 \pi}{a} x \cos \frac{n_2 \pi}{b} y e^{i(\omega t - k_z z)} ; \\ H_y &= -\frac{i\omega\epsilon_o}{\alpha^2} E_o \frac{n_1 \pi}{a} \cos \frac{n_1 \pi}{a} x \sin \frac{n_2 \pi}{b} y e^{i(\omega t - k_z z)} ; \\ H_z &= 0 . \end{aligned} \quad (4.166)$$

### Unde de tip magnetic (M)

În acest caz soluția se găsește utilizând același procedeu, cu observația că, de data aceasta, componentele de câmp se vor exprima în funcție de derivatele parțiale ale lui  $H_z$  în raport cu  $x$  și  $y$ , iar condițiile la limită vor fi concentrate în relația  $\left. \frac{\partial H_z}{\partial n} \right|_S = 0$ , care conduce la

$$\frac{dX}{dx} = 0 \text{ pentru } x = (0, a) ; \quad \frac{dY}{dy} = 0 \text{ pentru } y = (0, b).$$

Pentru componentele de câmp se obțin următoarele expresii (a căror deducere detaliată o lăsăm în seama cititorului) :

$$\begin{aligned}
E'_x &= \frac{i\omega\mu_o}{\alpha^2} H_o \frac{n_2\pi}{b} \cos \frac{n_1\pi}{a} x \sin \frac{n_2\pi}{b} y e^{i(\omega t - k_z z)} ; \\
E'_y &= -\frac{i\omega\mu_o}{\alpha^2} H_o \frac{n_1\pi}{a} \sin \frac{n_1\pi}{a} x \cos \frac{n_2\pi}{b} y e^{i(\omega t - k_z z)} ; \\
E'_z &= 0 ; \\
H'_x &= \frac{ik_z}{\alpha^2} H_o \frac{n_1\pi}{a} \sin \frac{n_1\pi}{a} x \cos \frac{n_2\pi}{b} y e^{i(\omega t - k_z z)} ; \\
H'_y &= \frac{ik_z}{\alpha^2} H_o \frac{n_2\pi}{b} \cos \frac{n_1\pi}{a} x \sin \frac{n_2\pi}{b} y e^{i(\omega t - k_z z)} ; \\
H'_z &= H_o \cos \frac{n_1\pi}{a} x \cos \frac{n_2\pi}{b} y e^{i(\omega t - k_z z)} .
\end{aligned} \tag{4.167}$$

### Discuție

a) Efectuând produsele scalare  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}$ , respectiv  $\mathbf{E}' \cdot \mathbf{H}'$ , constatăm că acestea sunt egale cu zero. Așadar, în ghid unda își păstrează proprietatea de transversalitate.

b) Notând  $\alpha = \omega_c/c$ , avem din (4.156)

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_c^2}{c^2} ; \quad k_z = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} . \tag{4.168}$$

Pentru ca unda să se propage în ghid fără absorbție (atenuare), este necesar să avem  $k_z^2 > 0$ , ceea ce implică pentru pulsație  $\omega \geq \omega_c = \omega_{min}$ . Așadar, există o frecvență *minimă* (sau *critică*, sau, încă, *de prag*) pe care trebuie s-o posede unda pentru a se propaga prin ghid

$$\omega_c = \omega_{min} = 2\pi\nu_{min} = 2\pi \frac{c}{\lambda_{max}} . \tag{4.169}$$

Dacă  $\omega < \omega_c$ , unda se atenuează prin absorbție și nu se propagă. Prin urmare, ghidul joacă rol de *filtru de frecvențe*.

c) Combinând (4.156) cu (4.162), avem :

$$\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \pi^2 \left( \frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} \right) = \frac{\omega_c^2}{c^2} ,$$

de unde

$$\lambda_c = \lambda_{max} = \frac{2\pi c}{\omega_c} = \frac{2}{\sqrt{\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2}}} . \quad (4.170)$$

Lungimea de undă critică se notează, de obicei, cu doi indici, corespunzând valorilor lui  $n_1$  și  $n_2$  pentru care  $\lambda = \lambda_c$ . Astfel, din investigarea soluției pentru undele de tip (E), deducem că cele mai mici valori posibile ale lui  $n_1$  și  $n_2$  sunt :  $n_1 = n_2 = 1$  (valoarea 0 nu este posibilă, în sensul că ar anula unda). Așadar :

$$\lambda_{max} = \lambda_{11} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} . \quad (4.171)$$

Dacă  $a = b$ , avem  $\lambda_{11} = a \sqrt{2}$ , deci  $\lambda_{max}$  este de ordinul dimensiunii laturii secțiunii transversale a ghidului.

În cazul undelor de tip (M) obținem frecvența minimă analizând soluția (4.167), în particular  $H'_z$ . Aici, spre deosebire de cazul precedent, este posibilă și valoarea zero pentru numerele  $n_1$  și  $n_2$ . Urmând o cale cu totul similară, găsim

$$\lambda_{10} = 2a ; \quad \lambda_{01} = 2b . \quad (4.172)$$

Din cele de mai sus rezultă că transmiterea undelor electromagnetice prin ghiduri de undă implică tehnica producerii undelor centimetrice și chiar milimetrice, corespunzătoare unor frecvențe de ordinul gigahertzilor ( $1GHz = 10^9 Hz$ ). Astfel de unde se numesc *microunde*.

d) Să calculăm cele două tipuri de viteză asociate undei ce se propagă prin ghid. Viteza de fază este

$$u_f = \frac{\omega}{k_z} = \frac{k}{k_z} c > c ,$$

iar cea de grup

$$u_g = \frac{\partial \omega}{\partial k_z} = \frac{c k_z}{\sqrt{\alpha^2 + k_z^2}} = \frac{c^2 k_z}{\omega} = \frac{k_z}{k} c < c .$$

Evident  $u_f u_g = c^2$ , ca o dovadă în plus în sprijinul considerațiilor teoretice de mai sus.

e) Să determinăm *energia transportată de undă prin ghid*. Fie unda de tip (E) și să facem apel la vectorul lui Poynting complex  $\mathbf{\Pi}$ , definit în §4.4. Utilizând (4.46), avem

$$\begin{aligned} \langle \phi_{em} \rangle &= \frac{1}{2} \left[ \operatorname{Re} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \right] \cdot \mathbf{n} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)_z = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (E_x H_y^* - E_y H_x^*), \end{aligned}$$

sau, dacă utilizăm (4.159),

$$\begin{aligned} \langle \phi_{em} \rangle &= \frac{1}{2} \frac{k_z \epsilon_o \omega}{\alpha^4} \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} \frac{\partial E_z^*}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial y} \frac{\partial E_z^*}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{k_z \epsilon_o \omega}{\alpha^4} (\nabla_2 E_z) \cdot (\nabla_2 E_z^*), \end{aligned}$$

unde  $\nabla_2 = \mathbf{i} \partial/\partial x + \mathbf{j} \partial/\partial y$  este operatorul *nabla* în planul  $xOy$ . Fluxul energiei electromagnetice prin secțiunea  $S$  a ghidului va fi

$$\Phi_{em} = \int_S \langle \phi_{em} \rangle dS = \frac{1}{2} \frac{k_z \epsilon_o \omega}{\alpha^4} \int_S (\nabla_2 E_z) \cdot (\nabla_2 E_z^*) dS.$$

Integrând prin părți, avem

$$\int_S (\nabla_2 E_z) \cdot (\nabla_2 E_z^*) dS = \oint_C E_z^* \frac{\partial E_z}{\partial n} dl - \int_S E_z^* \Delta_2 E_z dS,$$

unde  $C$  este conturul ghidului. Cum  $E_z|_S = 0$ , integrala pe contur se anulează. Pe de altă parte, potrivit discuției de mai sus,  $\Delta_2 E_z = -\alpha^2 E_z$ , deci

$$\Phi_{em} = \frac{1}{2} \frac{k_z \epsilon_o \omega}{\alpha^2} \int_S |E_z|^2 dS.$$

Energia pe unitatea de lungime a ghidului va fi

$$\frac{W_{em}}{l} = \frac{\Phi_{em}}{l t} = \frac{\Phi_{em}}{u_z} = \frac{1}{2} \frac{k_z \epsilon_o \omega}{\alpha^2} \int_S |E_z|^2 dS.$$



În vid, alegând pragul de frecvență, avem  $\omega = ck$  și regăsim expresia cunoscută

$$\frac{W_{em}}{l} = \frac{1}{2} \epsilon_o \int_S |E_z|^2 dS .$$

Pentru undele de tip (M), în vid, un calcul similar conduce la relația

$$\frac{W_{em}}{l} = \frac{1}{2} \mu_o \int_S |H_z|^2 dS ,$$

după cum era de așteptat.

### B. Ghiduri de undă de secțiune circulară

Spre deosebire de cazul precedent, în care a fost indicată utilizarea coordonatelor carteziene ortogonale, de data aceasta se impune folosirea coordonatelor cilindrice  $\rho, \phi, z$ . Alegând și de data aceasta axa  $Oz$  orientată după axa ghidului, soluțiile ecuațiilor (4.153), scrise în coordonate cilindrice, vor fi de forma

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\rho, \phi, z) &= \mathbf{E}(\rho, \phi) e^{i(\omega t - k_z z)} ; \\ \mathbf{H}(\rho, \phi, z) &= \mathbf{H}(\rho, \phi) e^{i(\omega t - k_z z)} . \end{aligned} \quad (4.173)$$

Introducând soluțiile (4.173) în (4.153), regăsim ecuațiile (4.155), unde notația (4.156) își menține semnificația, iar laplaceanul bidimensional  $\Delta_2$  va fi

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} .$$

În continuare, urmând procedeul cunoscut, vom scrie soluția pentru unda de tip electric sub forma

$$E_z(\rho, \phi) = F(\rho) \Phi(\phi) ,$$

după care, separând variabilele, găsim

$$\rho^2 \frac{F''}{F} + \rho \frac{F'}{F} + \alpha^2 \rho^2 = -\frac{\Phi''}{\Phi} = p ,$$

unde  $p$  este o constantă. Soluția căutată trebuie să fie periodică, de perioadă  $2\pi$ , prin urmare soluția ecuației

$$\Phi'' + p\Phi = 0,$$

adică  $\Phi \sim e^{\pm\sqrt{p}}$ , cere să avem  $\sqrt{p} = m$  (număr întreg). Găsim atunci

$$F''' + \frac{1}{\rho}F' + \left(\alpha^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right)F = 0 ,$$

sau, dacă efectuăm schimbarea de variabilă  $\rho_1 = \alpha\rho$ ,

$$\frac{d^2F}{d\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_1} \frac{dF}{d\rho_1} + \left(1 - \frac{m^2}{\rho_1^2}\right)F = 0 . \quad (4.174)$$

După cum știm (vezi 1.136), aceasta este o ecuație de tip *Bessel*. Singura soluție a acestei ecuații ce satisface condițiile fizice este funcția Bessel de ordinul  $m$  :  $J_m(\rho_1) = J_m(\alpha\rho)$ .

Componentele vectorilor de câmp, pentru unda de tip electric, vor fi atunci

$$\begin{aligned} E_\rho &= -ik_z \alpha J'_m(\alpha\rho) \frac{\sin}{\cos}(m\phi) e^{i(\omega t - k_z z)} ; \\ E_\phi &= -ik_z \frac{m}{\rho} J_m(\alpha\rho) \frac{\cos}{-\sin}(m\phi) e^{i(\omega t - k_z z)} ; \\ E_z &= \alpha^2 J_m(\alpha\rho) \frac{\sin}{\cos}(m\phi) e^{i(\omega t - k_z z)} ; \\ H_\rho &= \frac{ik^2}{\mu\omega\rho} m J_m(\alpha\rho) \frac{\cos}{-\sin}(m\phi) e^{i(\omega t - k_z z)} ; \\ H_\phi &= -\frac{ik^2}{\mu\omega} \alpha J'_m(\alpha\rho) \frac{\sin}{\cos}(m\phi) e^{i(\omega t - k_z z)} ; \\ H_z &= 0 , \end{aligned} \quad (4.175)$$

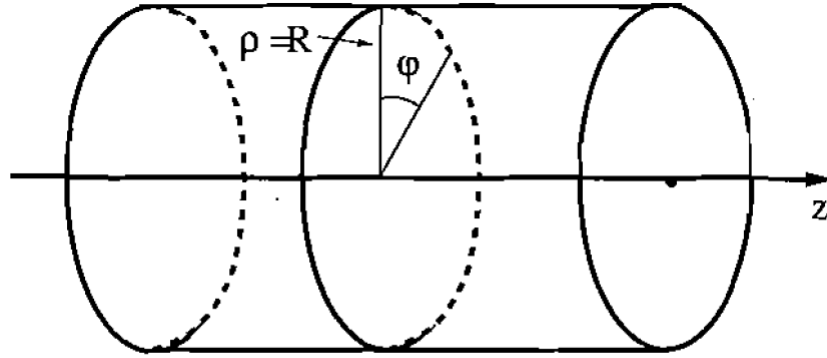
iar pentru cele de tip magnetic

$$E'_\rho = \frac{i\omega\mu}{\rho} m J_m(\alpha\rho) \frac{\cos}{-\sin}(m\phi) e^{i(\omega t - k_z z)} ;$$

$$\begin{aligned}
 E'_\phi &= -i\omega\mu\alpha J'_m(\alpha\rho) \frac{\sin}{\cos}(m\phi) e^{i(\omega t - k_z z)} ; \\
 E'_z &= 0 ;
 \end{aligned}
 \tag{4.176}$$

$$\begin{aligned}
 H'_\rho &= ik_z\alpha J'_m(\alpha\rho) \frac{\sin}{\cos}(m\phi) e^{i(\omega t - k_z z)} ; \\
 H'_\phi &= \frac{ik_z m}{\rho} J_m(\alpha\rho) \frac{\cos}{-\sin}(m\phi) e^{i(\omega t - k_z z)} ; \\
 H'_z &= -\alpha^2 J_m(\alpha\rho) \frac{\sin}{\cos}(m\phi) e^{i(\omega t - k_z z)} ,
 \end{aligned}$$

unde  $J'_m(\alpha\rho) = J'_m(\rho_1) = dJ_m/d\rho_1$ .



**Fig. 4.16.**

Având în vedere că  $\mathbf{E}$  are direcția normalei la peretele ghidului (direcția lui  $\rho$ ), aceasta implică pentru componentele tangențiale (vezi Fig.4.16)

$$E_z|_{\rho=R} = E_\phi|_{\rho=R} = 0 ,$$

care conduce la relațiile

$$\begin{aligned}
 J_m(\alpha R) &= 0 \quad \text{pentru undele de tip (E)} ; \\
 J'_m(\alpha R) &= 0 \quad \text{pentru undele de tip (M)} .
 \end{aligned}
 \tag{4.177}$$

Fie  $\mu_1^{(m)}, \mu_2^{(m)}, \dots, \mu_i^{(m)} \dots$  soluțiile succesive ale ecuației (4.177)<sub>1</sub> și  $\nu_1^{(m)}, \nu_2^{(m)}, \dots, \nu_i^{(m)} \dots$  soluțiile succesive ale ecuației (4.177)<sub>2</sub>, adică

$$\alpha_{mi} \equiv \alpha_i = \frac{\mu_i^{(m)}}{R} \quad \text{pentru undele de tip (E)} ;$$

$$\alpha'_{mi} \equiv \alpha'_i = \frac{\nu_i^{(m)}}{R} \quad \text{pentru undele de tip (M)} . \quad (4.178)$$

Am obținut, deci, o serie dublă, infinită, de valori  $\alpha$ , fiecare caracterizată prin doi indici, pentru care propagarea undelor în ghid este posibilă. Pentru o valoare dată a numărului de undă  $k$ , deci pentru o frecvență dată, există seria dublă de valori posibile pentru  $k_z$

$$k_z^2 = k^2 - \alpha_{mi}^2 ; \quad \text{sau} \quad k_z^2 = k^2 - \alpha'_{mi}{}^2 , \quad (4.179)$$

după cum unda este de tip (E) sau de tip (M). Pentru fiecare valoare a lui  $k_z$  corespunde o lungime de undă și o viteză de propagare a fazei undei în ghid date de

$$\lambda = \frac{2\pi}{k_z} ; \quad u_f = \frac{\omega}{k_z} .$$

Apelând la relația de dispersie în vid  $\omega = c k$ , rezultă

$$u_f = \frac{k}{k_z} c > c , \quad (4.180)$$

Pentru a calcula viteza de grup, vom renunța la indicii lui  $\alpha$ . Din (4.179) avem :

$$u_g = \frac{\partial \omega}{\partial k_z} = \frac{ck_z}{\sqrt{k_z^2 + \alpha^2}} = \frac{c^2 k_z}{\omega} = \frac{k_z}{k} c < c ,$$

de unde

$$u_f u_g = c^2 ,$$

rezultat întâlnit la studiul ghidurilor cu secțiune rectangulară. Pentru ca unda să se propage în ghid *fără absorbție*, trebuie să avem

$$k_z^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_c^2) > 0 ,$$

unde  $\omega_c = \alpha c$  este pulsația minimă (critică), ce exprimă granița dintre transmisie și absorbție. Mai putem scrie

$$\omega_c = 2\pi\nu_{min} = c \alpha_{min} = c \frac{\mu_1^{(o)}}{R} ,$$

unde  $\mu_1^{(o)}$  este rădăcina de ordinul zero a ecuației (4.177)<sub>1</sub> și are valoarea 2, 4. Deci

$$\nu_{min} = \frac{2,4}{2\pi R} c ; \quad \lambda_{max} = \frac{c}{\nu_{min}} = \frac{2\pi R}{2,4} . \quad (4.181)$$

De pildă, dacă raza tubului este de 10 cm , un calcul aproximativ dă

$$\nu \geq \nu_{min} \simeq 10^9 Hz ; \quad \lambda \leq \lambda_{max} \simeq 30 cm ,$$

frecvență (respectiv lungime de undă) ce corespund *microundelor*.

### C. Metoda lui Borgnis

O variantă de studiu teoretic al propagării undelor electromagnetice prin ghiduri de undă a fost oferită de fizicianul de origine germană *Fritz Eduard Borgnis*. În cele ce urmează vom da elementele de bază ale acestei teorii, urmând ca cititorul să efectueze singur calculele intermediare.

Metoda preconizată de Borgnis are ca punct de plecare ecuațiile câmpului electromagnetic (4.1') scrise în coordonate curbilinii ortogonale  $q_1, q_2, q_3$  unde, pentru simplificarea calculelor, se alege (vezi Anexa D)

$$h_1 = 1; \quad \frac{h_2}{h_3} \text{ independent de } q_1,$$

condiție îndeplinită, de altfel, în cele două cazuri precedente A și B. Admițând vectorii de câmp de forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_o e^{i\omega t} ; \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_o e^{i\omega t} , \quad (4.182)$$

Borgnis a arătat că fiecare dintre cele 8 ecuații ale lui Maxwell se poate reduce la una și aceeași ecuație, în care locul componentelor de câmp

$E_i, B_i$  este luat de o singură funcție  $U(q_1, q_2, q_3, t)$ , numită *funcția lui Borgnis*. Acest lucru se poate realiza fie prin substituția

$$\begin{aligned} E_1 &= k^2 U + \frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} ; & E_2 &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} ; & E_3 &= \frac{1}{h_3} \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_3} ; \\ H_1 &= 0 ; & H_2 &= \frac{ik^2}{\mu\omega h_3} \frac{\partial U}{\partial q_3} ; & H_3 &= - \frac{ik^2}{\mu\omega h_2} \frac{\partial U}{\partial q_2} , \end{aligned} \quad (4.183)$$

fie prin substituția

$$\begin{aligned} E'_1 &= 0 ; & E'_2 &= \frac{i\omega\mu}{h_3} \frac{\partial U'}{\partial q_3} ; & E'_3 &= - \frac{i\omega\mu}{h_2} \frac{\partial U'}{\partial q_2} ; \\ H'_1 &= -k^2 U' - \frac{\partial^2 U'}{\partial q_1^2} ; & H'_2 &= - \frac{1}{h_2} \frac{\partial^2 U'}{\partial q_1 \partial q_2} ; & H'_3 &= - \frac{1}{h_3} \frac{\partial^2 U'}{\partial q_1 \partial q_3} . \end{aligned} \quad (4.184)$$

Efectuând calculele găsim, fără dificultate, următoarea ecuație cu derivate parțiale de ordinul al doilea

$$\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} + \frac{1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_3}{h_2} \frac{\partial U}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{h_2}{h_3} \frac{\partial U}{\partial q_3} \right) \right] + k^2 U = 0 , \quad (4.185)$$

numită *ecuația lui Borgnis*.

Cele două tipuri de soluții (4.183) și (4.184) dau două tipuri de unde (numite și *moduri de propagare*) ce se pot propaga în ghid : unde de tip (E) și unde de tip (M). Alegând (de pildă, în coordonate cilindrice) axa  $z$  după axa tubului, funcția lui Borgnis se poate scrie

$$U(q_1, q_2, q_3, t) = U_o(q_2, q_3) e^{i(\omega t - k_z z)}.$$

În continuare, discuția urmează calea deja cunoscută din cele două exemple precedente : se scriu condițiile la limită și se asociază soluțiile cu aceste condiții.

Remarcăm faptul că, pe de o parte, metoda oferită de Borgnis conține cazurile (A) și (B) drept cazuri particulare, dar pe de alta substituțiile (4.183) și (4.184) nu sunt chiar atât de evidente și se obțin doar prin încercări repetate.

### Observație

Undele electromagnetice transmise cu ajutorul ghidurilor sunt direcționate *colimate*, motiv pentru care receptorul trebuie să "vadă" sursa emițătoare (vezi discuția ce însoțește Fig.4.12).

Un tip special de ghiduri, destinate undelor electromagnetice luminoase, sunt așa-numitele *fibre optice*, dispozitive ce permit transmiterea la distanță, fără pierderi, a imaginilor. Fenomenul ce stă la baza construirii acestora este cel de reflexie totală.

### Problemă

Să se determine lungimea de undă  $\lambda_{max}$  a unei unde de tip ( $M$ ), care se propagă într-un ghid cu secțiune dreptunghiulară, de laturi  $a$  și  $b$ , dacă în interiorul ghidului se găsește un mediu semiconductor.

## §4.10. Teoria radiației electromagnetice

### Soluționarea ecuațiilor cu derivate parțiale ale potențialelor electrodinamice

Cu prilejul studiului electrostaticii și al magnetostaticii am definit noțiunile de multipol electric, respectiv multipol magnetic și am investigat momentele electric și magnetic multipolare, plecând de la expresiile potențialului scalar  $\mathcal{N}(\mathbf{r})$  și a potențialului vector  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  (vezi 1.77 și 2.38 )

$$\mathcal{N}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' ; \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' , \quad (4.186)$$

prin dezvoltarea integrandului în serie Taylor. În aceste relații sursele sunt considerate staționare, fapt ce se traduce matematic prin aceea că densitățile de sarcină  $\rho(\mathbf{r})$  și de curent  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  nu depind explicit de timp.

În regim *nestaționar*, potențialele electrodinamice  $\mathcal{N}(\mathbf{r}, t)$  și  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  vor fi soluții ale ecuațiilor de tip D'Alembert neomogene (vezi 3.69 și 3.70)

$$\Delta \mathcal{N} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial t^2} = - \frac{\rho}{\epsilon} ; \quad \Delta \mathbf{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = - \mu \mathbf{j}, \quad (4.187)$$

în care sursele (densitățile de sarcină  $\rho(\mathbf{r}, t)$  și de curent  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ ) sunt funcții atât de poziție, cât și de timp.

În cele ce urmează ne propunem să soluționăm ecuațiile (4.187) prin *metoda funcției Green* (vezi Anexa F). Observăm, în acest sens, că ecuațiile (4.187) au forma comună

$$\square \psi = -f(\mathbf{r}, t), \quad (4.188)$$

unde  $\square = \Delta - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$  este operatorul lui D'Alembert. Procedând ca și în Cap.I, vom defini funcția Green ca soluție a ecuației

$$\square G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'). \quad (4.189)$$

Dacă reușim să determinăm funcția  $G$ , atunci soluția ecuației (4.188) se va scrie sub forma

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}' \int dt' G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') f(\mathbf{r}', t'), \quad (4.190)$$

unde  $d\mathbf{r}'$  este un element de volum în spațiul vectorilor  $\mathbf{r}'$  (de exemplu  $d\mathbf{r}' = dx' dy' dz'$ ).

Pentru a determina funcția  $G$ , vom scrie transformatele Fourier ale lui  $G$  și  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t')$ . Fie  $\mathbf{k}$  și  $\omega$  noile variabile și  $g(\mathbf{k}, \omega)$  transformata Fourier a funcției Green. Avem atunci

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{k} \int d\omega e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} e^{-i\omega(t - t')} g(\mathbf{k}, \omega);$$

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\mathbf{k} \int d\omega e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} e^{-i\omega(t - t')}, \quad (4.191)$$

unde  $d\mathbf{k}$  este un element de "volum" în spațiul vectorilor de undă (de exemplu  $d\mathbf{k} = dk_x dk_y dk_z$ ). Notând  $\mathbf{r} - \mathbf{r}' = \mathbf{R}$ ;  $t - t' = \tau$  și înlocuind (4.191) în (4.189), avem :

$$\square \left[ e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} e^{-i\omega\tau} \right] = \left( k^2 + \frac{\omega^2}{u^2} \right) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R} - \omega\tau)},$$

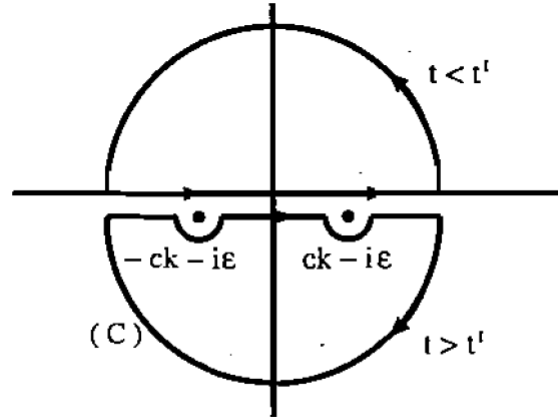


căci operatorul  $\square$  este independent de variabilele de integrare. Rezultă atunci transformata Fourier  $g(\mathbf{k}, \omega)$ , ca soluție a unei ecuații algebrice

$$g(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{u^2}} . \quad (4.192)$$

Înlocuind acest rezultat în expresia funcției Green (4.191)<sub>1</sub>, găsim

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\mathbf{k} \int \frac{e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R} - \omega \tau)} }{k^2 - \frac{\omega^2}{u^2}} d\omega . \quad (4.193)$$



**Fig. 4.17.**

Observăm că integrala după  $\omega$  este divergentă datorită polilor  $\omega = \pm uk$  de la numitor. Pentru a efectua integrarea, vom considera  $\omega$  drept un număr complex și vom alege polii în mod convenabil, fiind totodată atenți să păstrăm sensul relației de cauzalitate dintre funcțiile  $f$  și  $\psi$  din (4.188) : dacă  $f$  este *cauza* (sursa) unui fenomen, atunci  $\psi$  este *efectul* acestuia. De pildă, densitatea de curent dintr-un circuit este cauza ce produce radiația într-o antenă. Aceasta înseamnă, în cazul nostru, că  $\psi(\mathbf{r}, t)$  poate depinde de  $f(\mathbf{r}', t')$  numai dacă  $t > t'$ , deci integrala

$$\int d\omega \frac{e^{-i\omega \tau}}{k^2 - \frac{\omega^2}{u^2}}$$

nu aduce nici o contribuție în (4.193) pentru  $t < t'$ . Această concluzie ne determină să alegem polii în apropierea axei reale, dar în semiplanul inferior (Fig.4.17), ceea ce se obține formal punând  $\omega + i\epsilon$  în loc de  $\omega$  și considerând apoi limita pentru  $\epsilon \rightarrow 0$ . Alegând un contur de integrare circular ce se închide pe axa reală, cu polii în interiorul conturului, și având în vedere că  $\tau > 0$ , putem aplica formula reziduurilor

$$\oint_C f(z) dz = -2\pi i \sum_{k=1}^n a_1^{(k)}, \quad (4.194)$$

unde  $n$  este numărul polilor aflați în interiorul curbei închise  $C$ ,  $a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, \dots$  sunt reziduurile respective, iar semnul minus se datorează sensului de parcurs pe conturul de integrare, indicat în Fig.4.17. După cum este cunoscut din teoria funcțiilor de o variabilă complexă, reziduurile se calculează după formula

$$\text{Rez } f(z)|_{z=z_j} = (z - z_j) f(z)|_{z=z_j}. \quad (4.195)$$

Observând că integrandul nostru are singularități în  $z_1 = -ku - i\epsilon$ ,  $z_2 = ku - i\epsilon$ , avem

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon^{i(\omega+i\epsilon)\tau}}{k^2 - \frac{(\omega+i\epsilon)^2}{u^2}} &= 2\pi i c^2 \left( \frac{e^{-iuk\tau}}{2uk} + \frac{e^{iuk\tau}}{-2uk} \right) = \\ &= \frac{2\pi u}{k} \sin uk\tau \quad (t > t'). \end{aligned} \quad (4.196)$$

Înlocuind acest rezultat în (4.193), avem

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{u}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \int e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} \frac{\sin uk\tau}{k}. \quad (4.197)$$

Pentru a calcula integrala din (4.196), apelăm la coordonate sferice în spațiul vectorilor de undă. În acest caz  $d\mathbf{k} = d^3k = k^2 \sin \theta dk d\theta d\phi$ ,  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{R} = k R \sin \theta$  și atunci

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{u}{(2\pi)^3} \int_0^\infty k \sin uk\tau dk \int_0^\pi e^{ikR \cos \theta} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi. \quad (4.198)$$

Integrala după  $\theta$  se calculează ușor cu ajutorul substituției  $kr \cos \theta = \xi$ . Se obține

$$\int_0^\pi e^{ikR \cos \theta} \sin \theta \, d\theta = \frac{2}{kR} \sin kR$$

și atunci

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{2u}{(2\pi)^2 R} \int_0^\infty \sin kR \sin uk\tau \, dk. \quad (4.199)$$

Această ultimă integrală se calculează utilizând formula trigonometrică

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$$

ceea ce ne indică totodată faptul că integrandul din (4.199) este o funcție pară, deci putem scrie

$$\int_0^\infty = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty},$$

adică

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{u}{2(2\pi)^2 R} \int_{-\infty}^{+\infty} [\cos(kR - uk\tau) - \cos(kR + uk\tau)] \, dk.$$

Observând că în integrand putem adăuga în mod convenabil funcțiile impare  $i \sin(kR - uk\tau)$  și  $i \sin(kR + uk\tau)$ , caz în care

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(R-uk)} \, dk = 2\pi \delta(R - u\tau);$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(R+uk)} \, dk = 2\pi \delta(R + u\tau),$$

nu sunt altceva decât transformatele Fourier ale distribuțiilor Dirac, mai putem scrie  $G$  sub forma

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{u}{4\pi R} [\delta(R - u\tau) - \delta(R + u\tau)],$$

sau, dacă apelăm la (E.16),

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{1}{4\pi R} \left[ \delta\left(\tau - \frac{R}{u}\right) - \delta\left(\tau + \frac{R}{u}\right) \right]. \quad (4.200)$$

Ca și până acum, vom lua în considerație numai undele progresive, adică numai termenul ce conține  $\delta(\tau - R/u)$  din (4.200). Revenind la vechea notație, obținem în definitiv  $G$  sub forma

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{u}\right). \quad (4.201)$$

Relația (4.201) exprimă faptul că efectul observat în punctul determinat de vectorul de poziție  $\mathbf{r}$ , la momentul  $t$ , este datorat perturbației ce s-a produs în punctul  $\mathbf{r}'$  la un moment *anterior* (*precedent*, *retardat*)  $t' = t - R/u < t$ . Din acest motiv, funcția Green (4.201) se numește *funcție Green retardată*. (Același raționament ne determină să numim funcția Green ce conține  $\delta(\tau + R/c)$  - *funcție Green avansată*). Înlocuind (4.201) în (4.190) și integrând după  $t'$ , obținem în sfârșit

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{r}' \int_{-\infty}^t dt' \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{u}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} f(\mathbf{r}', t') = \\ &= \int \frac{f\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{u}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (4.202)$$

Așadar, pentru a cunoaște  $\psi(\mathbf{r}, t)$  (efectul), este necesar să cunoaștem  $f$  (cauza) la momentul retardat  $t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/u$ , în punctul determinat de  $\mathbf{r}'$ , raportul  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/u$  fiind timpul necesar propagării fenomenului din punctul  $\mathbf{r}'$  în punctul  $\mathbf{r}$ .

În concluzie, soluțiile ecuațiilor neomogene (4.187) ale potențialelor electrodinamice sunt de forma

$$\mathcal{N}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{u}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}';$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{u})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' , \quad (4.203)$$

numite *potențiale retardate*. Cunoașterea potențialelor  $\mathcal{N}$  și  $\mathbf{A}$ , deci a câmpului electromagnetic  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  în punctul  $\mathbf{r}$ , la momentul  $t$ , presupune cunoașterea surselor  $\rho$ ,  $\mathbf{j}$  ale câmpului, în punctul  $\mathbf{r}'$ , la momentul  $t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/u$ .

În regim cvasistaționar,  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/u \ll T$ , unde  $T$  este perioada oscilației electromagnetice. Dacă, de pildă,  $\nu = 50Hz$  (curent alternativ industrial), obținem  $R \ll cT = 6.10^3 km$ , deci curenții de joasă frecvență sunt, practic, cvasistaționari. Potențialele electrodinamice care descriu fenomenele electromagnetice cvasistaționare sunt, așadar, de forma

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' ; \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' . \end{aligned} \quad (4.204)$$

În regim staționar, precum știm, sursele  $\rho$  și  $\mathbf{j}$  nu depind explicit de timpul  $t$ , iar potențialele  $\mathcal{N}$  și  $\mathbf{A}$  sunt date de (4.186).

### Aplicații

a) Să determinăm potențialele  $\mathcal{N}$  și  $\mathbf{A}$  asociate câmpului produs de o sarcină punctiformă ce are o mișcare oarecare dată, în vid. Fie  $e$  sarcina particulei și  $\mathbf{x}(t)$  traiectoria acesteia. Vom scrie viteza particulei sub forma

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = c \boldsymbol{\beta}(t) , \quad (4.205)$$

iar densitățile de sarcină  $\rho(\mathbf{r}, t)$  și de curent  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  le vom exprima cu ajutorul distribuției lui Dirac

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e \delta[\mathbf{r} - \mathbf{x}(t)] ;$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = e c \boldsymbol{\beta}(t) \delta[\mathbf{r} - \mathbf{x}(t)] . \quad (4.206)$$

Să calculăm, de pildă, potențialul scalar  $\mathcal{N}$ . Potrivit lui (4.203)<sub>1</sub>, acesta va fi

$$\mathcal{N}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_o} \int \frac{\delta\left[\mathbf{r}' - \mathbf{x}\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)\right]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' .$$

Observând că distribuția *delta* ce intervine în integrală se poate scrie

$$\delta\left[\mathbf{r}' - \mathbf{x}\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)\right] = \int \delta[\mathbf{r}' - \mathbf{x}(t')] \delta\left(t' - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) dt' ,$$

mai avem

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{r}, t) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_o} \int dt' \int \frac{\delta[\mathbf{r}' - \mathbf{x}(t')] \delta\left(t' - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' = \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_o} \int dt' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}(t')|} \delta\left(t' - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) . \end{aligned} \quad (4.207)$$

Pe de altă parte, din teoria distribuției *delta* se știe că

$$\int g(t') \delta[f(t') - t] dt' = \left[ \frac{g(t')}{\frac{df}{dt'}} \right]_{f(t')=t} . \quad (4.208)$$

Cum în cazul nostru

$$g(t') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}(t')|} ; \quad f(t') = t' + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{x}(t')|}{c} ,$$

iar

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt'} &= 1 + \frac{1}{c} \frac{d}{dt'} \{[r_i - x_i(t')][r_i - x_i(t')]\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= 1 + \frac{1}{c} \frac{r_i - x_i(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}(t')|} \left( - \frac{dx_i}{dt'} \right) = 1 - \frac{(r_i - x_i)\beta_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}(t')|} = 1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} , \end{aligned}$$

unde  $\mathbf{n}$  este versorul direcției  $\mathbf{r} - \mathbf{x}(t')$ , avem în definitiv

$$\mathcal{N}(\mathbf{r}, t) = \left[ \frac{e}{4\pi\epsilon_o |\mathbf{r} - \mathbf{x}| (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right]_{t=t' + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{x}(t')|}{c}} , \quad (4.209)$$

în care  $\mathbf{n}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$  și  $\mathbf{x}$  sunt funcții de  $t'$ .

În mod similar se găsește potențialul vector

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \left[ \frac{\mu_o e \boldsymbol{\beta}}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{x}| (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right]_{t=t' + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{x}(t')|}{c}} . \quad (4.210)$$

Potențialele determinate prin relațiile (4.209), (4.210) se numesc *potențiale Wiechert - Lienard*.

Pe baza considerațiilor de mai sus, ne dăm seama că este incorect să exprimăm, de pildă, potențialul scalar al câmpului produs de un număr de electroni în mișcare prin formula

$$\mathcal{N}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{R} ,$$

deoarece densitatea de sarcină microscopică  $\rho$  depinde de  $t'$  care, la rândul său, depinde de  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ . Expresia corectă este (4.209)!

b) Să interpretăm, în lumina celor discutate în acest paragraf, *condiția de etalonare Lorentz* (vezi 3.68)

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} = 0 . \quad (4.211)$$

Din necesitatea ca această condiție să fie satisfăcută în punctul de observare, avem pe de o parte :

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{1}{R} \frac{\partial \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{u}\right)}{\partial\left(t - \frac{R}{u}\right)} d\tau' ,$$

Pe de altă parte, observăm că

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{u}\right) &= \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial\left(t - \frac{R}{u}\right)} \cdot \nabla\left(t - \frac{R}{u}\right) = \\ &= - \frac{1}{u} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial\left(t - \frac{R}{u}\right)} \cdot \nabla R = \frac{1}{u} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial\left(t - \frac{R}{u}\right)} \cdot \nabla' R ; \end{aligned}$$

$$\nabla' \cdot \mathbf{j} = (\nabla \cdot \mathbf{j})_{t - \frac{R}{u} = \text{const.}} - \frac{1}{u} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial \left(t - \frac{R}{u}\right)} \cdot \nabla' R ,$$

de unde

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = (\nabla' \cdot \mathbf{j})_{t - \frac{R}{u} = \text{const.}} - \nabla' \cdot \mathbf{j} .$$

În acest caz

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{j}}{R} \right) d\tau' ,$$

sau, după unele reduceri și aplicarea teoremei Green-Gauss-Ostrogradski,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{1}{R} (\nabla' \cdot \mathbf{j})_{t - \frac{R}{u} = \text{const.}} d\tau' .$$

Înlocuind aceste rezultate în condiția Lorentz (4.211), avem :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{1}{R} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial \left(t - \frac{R}{u}\right)} + (\nabla' \cdot \mathbf{j})_{t - \frac{R}{u} = \text{const.}} \right] d\tau' = 0 ,$$

de unde rezultă

$$\frac{\partial \rho}{\partial \left(t - \frac{R}{u}\right)} + (\nabla' \cdot \mathbf{j})_{t - \frac{R}{u} = \text{const.}} = 0 , \quad (4.212)$$

care nu este altceva decât *ecuația de continuitate*.

Conchidem, așadar, că relația cunoscută de noi sub numele de condiția Lorentz, impusă ca o condiție suplimentară pentru determinarea unică a potențialelor  $\mathcal{N}$  și  $\mathbf{A}$ , are o semnificație fizică mult mai profundă decât apare la prima vedere, ea fiind echivalentă cu legea conservării sarcinii electrice. Acest rezultat apare și mai evident în cadrul tratării relativist-covariante (tensoriale) a electrodinamicii (vezi Vol.II).

c) După cum știm (vezi 3.91), sursa câmpului vectorial  $\mathbf{Z}$  este polarizația  $\mathbf{P}$ . Ecuația (3.91) fiind perfect analoagă ecuațiilor potențialelor  $\mathbf{A}$  și  $\mathcal{N}$ , soluția

$$\mathbf{Z}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{u})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad (4.213)$$



este vectorul (potențialul) lui Hertz  $\mathbf{Z}$  retardat.

#### §4.11. Potențialele unei distribuții continue de sarcini variabile în timp

Să admitem că fenomenele electromagnetice (radiația, propagarea undelor etc.) au loc în vid ( $\epsilon \sim \epsilon_o$ ,  $\mu \sim \mu_o$ ) și să presupunem că sursele  $\rho$ ,  $\mathbf{j}$  sunt periodice în timp potrivit relațiilor

$$\begin{aligned}\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right) &= \rho(\mathbf{r}') e^{-i\omega\left(t - \frac{R}{c}\right)} = \rho(\mathbf{r}') e^{-i\omega t} e^{ikR}; \\ \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right) &= \mathbf{j}(\mathbf{r}') e^{-i\omega\left(t - \frac{R}{c}\right)} = \mathbf{j}(\mathbf{r}') e^{-i\omega t} e^{ikR},\end{aligned}\quad (4.214)$$

unde am utilizat notația cunoscută  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = R$ .

Potențialele retardate (4.203) se vor scrie atunci sub forma

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_o} e^{-i\omega t} \int_V \frac{1}{R} \rho(\mathbf{r}') e^{ikR} d\tau'; \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_o}{4\pi} e^{-i\omega t} \int_V \frac{1}{R} \mathbf{j}(\mathbf{r}') e^{ikR} d\tau'.\end{aligned}\quad (4.215)$$

Cunoașterea potențialelor  $\mathcal{N}$ ,  $\mathbf{A}$  permite determinarea câmpului electromagnetic  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  în punctul  $P$ , definit de vectorul de poziție  $\mathbf{r}$ , la momentul  $t$ . După depărtarea punctului în care măsurăm câmpul față de sursele  $\rho$ ,  $\mathbf{j}$ , distingem trei zone:

a) Zona apropiată ( $r \ll \lambda$ ), unde  $\lambda$  este lungimea de undă a radiației electromagnetice ;

b) Zona intermediară ( $r \simeq \lambda$ ) ;

c) Zona îndepărtată sau *zona undelor* ( $r \gg \lambda$ ). În cele ce urmează vom presupune că ne situăm în zona undelor și toate considerațiile matematice vor reflecta această supoziție.

Dezvoltând în serie factorii ce apar în integrandul din (4.215), avem succesiv :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} - x'_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{r} \right) + \dots \simeq \frac{1}{r} + \frac{x'_i x_i}{r^3} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{s}}{r} \right);$$

$$R \simeq \frac{r}{1 + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{s}}{r}} \simeq r \left( 1 - \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{s}}{r} \right) ;$$

$$e^{-ik\mathbf{r}' \cdot \mathbf{s}} \simeq 1 - ik\mathbf{r}' \cdot \mathbf{s} ;$$

$$\frac{e^{-ik\mathbf{r}' \cdot \mathbf{s}}}{R} \simeq \frac{1}{r} (1 - ik\mathbf{r}' \cdot \mathbf{s}) \left( 1 + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{s}}{r} \right) \simeq \frac{1}{r} \left[ 1 + \left( \frac{1}{r} - ik \right) (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{s}) \right] .$$

Potențialele electrodinamice devin atunci :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \left[ \int_V \rho(\mathbf{r}') d\tau' + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{r} - ik \right) \int_V \rho(\mathbf{r}') (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{s}) d\tau' + \dots \right] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{N}^{(i)}(\mathbf{r}, t) ; \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \left[ \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') d\tau' + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{r} - ik \right) \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{s}) d\tau' + \dots \right] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{A}^{(i)}(\mathbf{r}, t) . \end{aligned} \quad (4.216)$$

Observând că expresiile (4.216) obținute pentru  $\mathbf{A}$  și  $\mathcal{N}/V$  sunt similare, în continuare ne vom opri la un singur potențial, de pildă potențialul vector  $\mathbf{A}$ . Primii doi termeni din dezvoltarea (4.216)<sub>2</sub> sunt

$$\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') d\tau' ; \quad (4.217)$$

$$\mathbf{A}^{(2)}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \left( \frac{1}{r} - ik \right) \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{s}) d\tau' . \quad (4.218)$$

Interpretarea termenului  $\mathbf{A}^{(1)}$  este imediată : acesta reprezintă potențialul vector al câmpului produs de un *dipol electric oscilant*. În cazul staționar o asemenea noțiune nu are sens, iar integrala din (4.217) se anulează (vezi 2.54).

Pentru a găsi semnificația lui  $\mathbf{A}^{(2)}(\mathbf{r}, t)$ , să scriem integrandul din (4.218) sub forma

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{s} = \frac{1}{2} [(\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j} - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{r}'] + \frac{1}{2} [(\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j} + (\mathbf{s} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{r}'] , \quad (4.219)$$

ceea ce ne permite să considerăm  $\mathbf{A}^{(2)}$  ca fiind format din suma  $\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{A}_1^{(2)} + \mathbf{A}_2^{(2)}$ , unde termenul  $\mathbf{A}_1^{(2)}$  conține partea antisimetrică din (4.219), iar  $\mathbf{A}_2^{(2)}$  - cea simetrică. Observând că

$$\frac{1}{2} [(\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j} - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{r}'] = \frac{1}{2} (\mathbf{r}' \times \mathbf{j}) \times \mathbf{s} ,$$

potențialul  $\mathbf{A}_1^{(2)}$  va fi proporțional cu

$$\left( \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r}' \times \mathbf{j} \, d\tau' \right) \times \mathbf{s} = \mathbf{m} \times \mathbf{s} , \quad (4.220)$$

unde  $\mathbf{m}$  este momentul magnetic dipolar al distribuției continue de surse (vezi 2.55). Prin urmare,

$$\mathbf{A}_1^{(2)}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \left( \frac{1}{r} - ik \right) (\mathbf{m} \times \mathbf{s}) , \quad (4.221)$$

ceea ce arată că  $\mathbf{A}_1^{(2)}(\mathbf{r}, t)$  reprezintă potențialul vector al câmpului produs de un dipol magnetic. În sprijinul acestei afirmații vine faptul că, în regim staționar, regăsim formula cunoscută (vezi 2.56)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{s}}{r^2} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} .$$

Să stabilim, în continuare, semnificația lui  $\mathbf{A}_2^{(2)}(\mathbf{r}, t)$ . În acest scop, introducem termenul simetric din (4.219) în (4.218) și luăm componenta relației vectoriale după direcția  $x_i$  :

$$\frac{1}{2} \int_V [(\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j} + (\mathbf{s} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{r}']_i \, d\tau' = \frac{1}{2} \alpha_k \int_V (j_i x'_k + j_k x'_i) \, d\tau' =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \alpha_k \int_V \left( x'_k j_m \frac{\partial x'_i}{\partial x'_m} + x'_i j_m \frac{\partial x'_k}{\partial x'_m} \right) d\tau' = \\
&= \frac{1}{2} \alpha_k \int [-x'_i (j_m \delta_{km} + x'_k \nabla' \cdot \mathbf{j}) - x'_k (j_m \delta_{im} + x'_i \nabla' \cdot \mathbf{j})] d\tau' ,
\end{aligned}$$

unde am aplicat teorema Green-Gauss-Ostrogradski și am ținut seama că la infinit nu avem surse. Mai putem scrie

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \alpha_k \int_V (j_i x'_k + j_k x'_i) d\tau' = \\
&= -\frac{1}{2} \alpha_k \int_V (j_i x'_k + j_k x'_i) d\tau' - \alpha_k \int x'_i x'_k \nabla' \cdot \mathbf{j} d\tau' .
\end{aligned}$$

Dar, potrivit relațiilor (4.214) și ecuației de continuitate  $\nabla \cdot \mathbf{j} + \partial \rho / \partial t = 0$ , avem  $\nabla \cdot \mathbf{j} = i\omega \rho$ , ceea ce ne permite să mai scriem

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int_V [(\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j} + (\mathbf{s} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{r}']_i d\tau' = -\frac{1}{2} \alpha_k \int x'_i x'_k [i\omega \rho(\mathbf{r}')] d\tau' = \\
&= -\frac{i\omega}{6} \alpha_k \int (3x'_i x'_k - r'^2 \delta_{ik}) \rho(\mathbf{r}') d\tau' ,
\end{aligned}$$

unde am ținut seama că lui  $\mathbf{A}$  i se poate adăuga, fără a modifica câmpul, un vector arbitrar proporțional cu  $\mathbf{s}$ . Deoarece (vezi 1.81)

$$\int (3x'_i x'_k - r'^2 \delta_{ik}) \rho(\mathbf{r}') d\tau' = p_{ik}$$

este tensorul moment electric cuadrupolar pentru o distribuție continuă, staționară de sarcină electrică, avem în definitiv

$$\left[ \mathbf{A}_2^{(2)}(\mathbf{r}, t) \right]_i = \frac{\mu_o}{4\pi} \left( \frac{-i\omega}{6} \right) \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \left( \frac{1}{r} - ik \right) p_{ik} \alpha_k , \quad (4.222)$$

deci partea simetrică  $\mathbf{A}_2^{(2)}(\mathbf{r}, t)$  din  $\mathbf{A}^{(2)}$  este proporțională cu *momentul electric cuadrupolar*.

În concluzie, termenul  $\mathbf{A}_1^{(2)}$  exprimă potențialul vector al câmpului produs de distribuția continuă de sarcină variabilă în timp, în ipostaza

de *dipol magnetic* , iar  $\mathbf{A}_2^{(2)}$  - potențialul vector al aceleiași distribuții, în ipostaza de *cvadrupol electric*. Raționamentul poate continua pentru potențialele  $\mathbf{A}^{(3)}$ ,  $\mathbf{A}^{(4)}$  etc.

Menționăm, în final, că potențialul (4.216)<sub>1</sub> poate fi supus aceluiași tratament matematic, printr-un procedeu absolut analog celui prezentat mai sus. Cum, însă, în aplicația ce urmează este suficientă cunoașterea potențialului vector, lăsăm calculele și interpretarea rezultatului în seama cititorului.

### Aplicație. Dipolul electric radiant

Să determinăm câmpul electromagnetic  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  generat de un dipol electric oscilant într-un punct oarecare aflat în zona undelor ( $r \gg \lambda$ ). În acest scop vom face apel la relația (4.217). Componenta după  $x_i$  a integralei se va scrie

$$\begin{aligned} \int j_i d\tau' &= \int j_k \delta_{ik} d\tau' = \int j_k \frac{\partial x'_i}{\partial x'_k} d\tau' = \\ &= \int \frac{\partial}{\partial x'_k} (j_k x'_i) d\tau' - \int x'_i \frac{\partial j_k}{\partial x'_k} d\tau' . \end{aligned}$$

Aplicând primei integrale teorema Green-Gauss-Ostrogradski și având în vedere că la infinit nu există surse, aceasta se anulează. Prin urmare,

$$\int \mathbf{j}(\mathbf{r}') d\tau' = - \int \mathbf{r}' \nabla' \cdot \mathbf{j} d\tau' = -i\omega \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d\tau' ,$$

iar potențialul vector al câmpului dipolului se va scrie

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -i\omega \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d\tau' .$$

Dar, potrivit definiției (1.80), integrala din membrul drept nu este altceva decât momentul electric dipolar  $\mathbf{p}_o$  al unei distribuții continue de sarcini staționare. Dacă notăm

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_o e^{i(kr-\omega t)} ; \quad \dot{\mathbf{p}} = -i\omega \mathbf{p} , \quad (4.223)$$

mai putem scrie

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_o}{4\pi} \left( - \frac{i\omega \mathbf{p}}{r} \right) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{p}}}{r} . \quad (4.224)$$

Cunoașterea potențialului vector permite acum calcularea câmpului  $\mathbf{B}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = - \frac{i\omega\mu_o}{4\pi} \nabla \left( \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \right) \times \mathbf{p}_o = \\ &= - \frac{i\omega\mu_o}{4\pi} \left( \frac{ik}{r} \mathbf{s} - \frac{1}{r^2} \mathbf{s} \right) \times \mathbf{p} . \end{aligned}$$

Faptul că suntem în zona undelor, deci la distanță mare de dipolul oscilant, ne permite să neglijăm termenii ce conțin la numitor puteri ale lui  $r$  superioare cifrei unu. (Această aproximație va fi utilizată și în continuare). Avem atunci

$$\mathbf{B} \simeq \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\omega k}{r} \mathbf{s} \times \mathbf{p} = \frac{\mu_o}{4\pi c} \frac{\ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{s}}{r} . \quad (4.225)$$

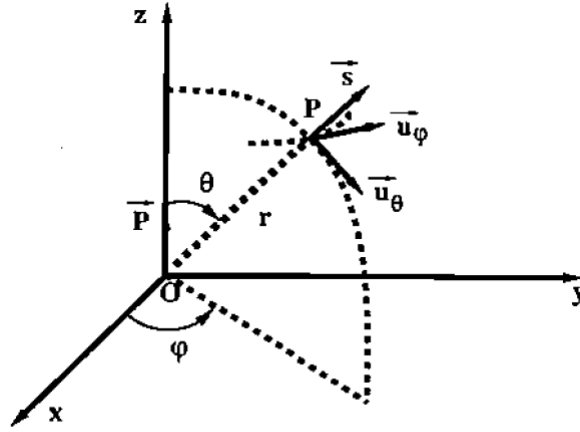


Fig. 4.18.

Cunoscând  $\mathbf{B}$ , putem determina în continuare câmpul  $\mathbf{E}$ . Deoarece fenomenele analizate au loc în spațiul liber, vom aplica cele cunoscute

din §4.2 (vezi 4.19). Așadar :

$$\mathbf{E} = \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}} (\mathbf{H} \times \mathbf{s}) = c \mathbf{B} \times \mathbf{s} ,$$

sau, dacă avem în vedere (4.225),

$$\mathbf{E} \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_o c^2} \frac{\mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \ddot{\mathbf{p}})}{r} . \quad (4.226)$$

Alegând dipolul orientat după axa  $Oz$  (Fig.4.18), vom ține seama că în punctul unde calculăm câmpul, aflat în zona undelor, forma undelor este sferică. Componentele lui  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{H}$  după direcțiile  $r$ ,  $\theta$ ,  $\phi$  se obțin cu ușurință din relațiile (4.225) și (4.226), scrise sub forma

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o c^2 r} [(\mathbf{s} \cdot \ddot{\mathbf{p}})\mathbf{s} - \ddot{\mathbf{p}}] ; \quad \mathbf{H} = \frac{1}{4\pi c r} \ddot{\mathbf{p}} \sin \theta \mathbf{u}_\phi . \quad (4.227)$$

Avem, deci:

$$E_r = \mathbf{E} \cdot \mathbf{s} = 0 ; \quad E_\theta = \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_\theta = \frac{\ddot{p} \sin \theta}{4\pi\epsilon_o c^2 r} ; \quad E_\phi = \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_\phi = 0 ;$$

$$H_r = \mathbf{H} \cdot \mathbf{s} = 0 ; \quad H_\theta = \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}_\theta = 0 ; \quad H_\phi = \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}_\phi = \frac{\ddot{p} \sin \theta}{4\pi c r} . \quad (4.228)$$

Aceste relații servesc, între altele, la calcularea *puterii medii* radiate de dipolul electric oscilant (antena), adică a energiei electromagnetice care traversează în unitatea de timp o anumită suprafață  $S$ , aflată în zona undelor. Aceasta va fi (vezi 4.46 - 4.48)

$$\langle P \rangle = \oint_S \langle \mathbf{\Pi} \rangle \cdot \mathbf{s} dS \quad (\mathbf{n} \simeq \mathbf{s}) , \quad (4.229)$$

unde  $\langle \mathbf{\Pi} \rangle$  este valoarea medie pe o perioadă a vectorului lui Poynting complex

$$\langle \mathbf{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) .$$

Utilizând relațiile (4.228), avem

$$\langle \mathbf{\Pi} \rangle \cdot \mathbf{s} = \frac{1}{32\pi^2 \epsilon_o c^3 r^2} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 \sin^2 \theta.$$

Elementul de suprafață pe sfera de rază  $r$  este  $dS = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi$ , prin urmare în (4.229) vom avea de calculat integrala

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{4}{3} 2\pi = \frac{8\pi}{3},$$

așadar

$$\langle P \rangle = \frac{1}{12\pi \epsilon_o c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 = \frac{\omega^4 p_o^2}{12\pi \epsilon_o c^3} = \frac{4}{3} \pi^3 c p_o^2 \frac{1}{\lambda^4}. \quad (4.230)$$

Ultima relație arată că puterea medie radiată de dipolul oscilant variază invers proporțional cu puterea a patra a lungimii de undă :  $\langle P \rangle \sim 1/\lambda^4$ . Cu alte cuvinte, pentru ca energia electromagnetică ce ajunge la receptor în unitatea de timp să fie cât mai mare, este necesar ca undele emise de sursă să aibă o lungime de undă cât mai mică. Într-adevăr, emisiunile posturilor îndepărtate sunt recepționate - în general - pe lungimi de undă mici (scurte, ultracurte).

Relația  $\langle P \rangle \sim 1/\lambda^4$  este cunoscută sub numele de *legea cerului albastru* a lui *Lord Rayleigh* și explică culoare albastră a cerului : radiația albastră, cu lungime de undă mai mică în comparație cu alte componente ale luminii albe, este difuzată mai puternic decât radiațiile cu alte lungimi de undă de către moleculele de aer. De pildă, raportul dintre lungimile de undă ale radiațiilor roșie și albastră este  $\lambda/\lambda_a = 1,44$ , iar  $(1,44)^4 \simeq 4,3$ , ceea ce înseamnă că radiația albastră este difuzată de patru ori mai puternic decât cea roșie.

### Observații

a) Utilizând (3.84), (4.224) și aplicând convenția privind neglijarea termenilor cu  $r^n, n \geq 2$  la numitor, avem

$$\mathbf{Z}(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{1}{4\pi \epsilon_o} \frac{\mathbf{p}}{r}. \quad (4.231)$$



Potențialul lui Hertz astfel definit poate servi, la rândul său, pentru determinarea câmpului electromagnetic al unui dipol oscilant.

b) Întrucât  $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$ , avem  $\dot{\mathbf{p}} = q\dot{\mathbf{l}}$ , deci, în conformitate cu (4.230), puterea medie radiată de dipolul oscilant este proporțională cu accelerația sarcinilor. De aici rezultă că numai un sistem accelerat poate emite unde electromagnetice.

În cadrul modelului planetar al atomului, elaborat de Rutherford, atomul era conceput ca un astfel de sistem. Deficiența modelului lui Rutherford consta în aceea că, emițând continuu radiație cu o frecvență egală cu cea a rotației electronului în jurul nucleului, electronul trebuia să cadă pe nucleu. În realitate, atomii sunt foarte stabili, iar între frecvența de rotație a electronilor în jurul nucleului și frecvența radiației emise de atomi nu există nici o legătură. Așa cum a arătat Niels Bohr în anul 1913, prin celebrele sale postulate, atomii se pot găsi timp îndelungat în stări staționare, deși electronii au o mișcare accelerată. Prin urmare, la acest nivel de organizare a materiei, legile electrodinamicii clasice nu pot explica în mod corect realitatea fizică. A fost necesară elaborarea unei noi teorii, bazată pe teoria cuantelor, teorie ce a cunoscut diverse etape de perfecționare, începând cu teoria lui Bohr, continuând cu mecanica cuantică (Louis de Broglie, Schrödinger, Heisenberg) și culminând cu teoria cuantică a câmpului (Dirac, Feynman).

### Probleme

1. Să se descompună în unde plane câmpul electromagnetic al unui electron ce se deplasează rectiliniu și uniform cu viteza  $\mathbf{v}$ .
2. Utilizând vectorul lui Hertz, să se calculeze câmpul electromagnetic generat de un dipol electric oscilant aflat în originea coordonatelor și având momentul orientat după axa  $Oz$ .

## CAPITOLUL V

### ELEMENTE DE MAGNETOFLUIDODINAMICA

#### §5.1. Considerații generale

În deceniul al patrulea al secolului XX a apărut o ramură (pe atunci) nouă a științelor fizice, ca disciplină aflată la granița dintre mecanica fluidelor, pe de o parte, și teoria câmpului electromagnetic, pe de alta : *magnetodinamica fluidelor*. Această disciplină poate fi încadrată într-o sferă mai largă, ca obiect și aplicații, anume *fizica plasmei*.

Plasma este concepută ca un amestec de electroni, ioni, fotoni, atomi și molecule neutre. Densitatea sarcinilor pozitive este aproximativ egală cu cea a sarcinilor negative, astfel încât - în ansamblu - plasma este cvasineutră. În anumite cazuri, "gazul" electronic din metale poate fi studiat prin metodele oferite de fizica plasmei.

Dacă plasma nu este supusă acțiunii unui câmp electric sau magnetic exterior, nu există nici o deosebire esențială între starea de fluid (gaz, lichid) și cea de plasmă. În momentul apariției câmpului însă, are loc o interacțiune între câmp și particulele electrizate, ceea ce poate duce la modificarea formei fluidului. La rândul ei, variația structurii macroscopice a fluidului influențează câmpul exterior, astfel că sistemul fluid - câmp exterior se găsește în interacțiune reciprocă.

Există două metode fundamentale de studiu al plasmei :

a) *Metoda statistică*, care face apel la formalismul oferit de fizica

statistică, în particular teoria cinetică a gazelor, ecuațiile Boltzmann, Vlasov, Fokker - Planck etc.

b) *Metoda magnetohidrodinamică*, ce concepe plasma ca un fluid conductor, ionizat, supus acțiunii unui câmp electromagnetic. Ecuațiile ce descriu comportarea unui astfel de model sunt ecuațiile mecanicii fluidelor, combinate cu ecuațiile câmpului electromagnetic (ecuațiile lui Maxwell).

Starea de plasmă este oarecum neobișnuită la nivel terestru, întâlnindu-se doar în unele fenomene ca : fulgerul, aurora boreală, fulgerul globular etc. Dimpotrivă, în Univers corpurile solide sunt excepții, cea mai mare parte a substanței (peste 99 procente) aflându-se sub formă de plasmă.

Cercetările au arătat că sursa de bază a energiei solare, unde materia se găsește sub formă de plasmă fierbinte, o constituie reacțiile termonucleare de fuziune a nucleelor ușoare (deuteriu, tritium), reacții ce au loc la temperaturi de zeci și sute de milioane de grade. S-au efectuat și se efectuează cercetări intense în vederea realizării unor procese analoage în condiții de laborator. În acest scop s-au construit dispozitive speciale, cunoscute sub numele de "Stellarator", "Tokamak", "capcane magnetice" ș.a.

Pentru a produce în mod continuu și controlat reacții termonucleare este necesar ca plasma să aibă o temperatură minimă (sute de milioane de grade), o concentrație minimă ( $10^{15} \text{ nucleu/cm}^3$ ) și un timp de stabilitate minim (zecimi de secundă). Condițiile menționate trebuiesc îndeplinite simultan. Acest criteriu triplu a fost realizat în laborator și "foamea" de energie de care suferă în prezent omenirea îndreptățește pe deplin cercetările teoretice și experimentale - dintre care unele foarte costisitoare - îndreptate spre utilizarea reacțiilor termonucleare ca o sursă de energie.

Studiul aplicativ al plasmei s-a dezvoltat și în alte direcții. Între acestea evidențiem : construirea generatoarelor magnetohidrodinamice (dispozitive care permit transformarea directă a energiei termice a fluidelor ionizate în energie electrică), arzătoare cu plasmă, cercetări de plasmochimie etc.

În cele ce urmează vom aborda studiul plasmei prin prisma formalismului magnetohidrodinamic, stabilind sistemul fundamental de ecuații

pentru modelul de magnetofluid și oferind câteva aplicații dintre cele mai cunoscute în literatura de specialitate.

### §5.2. Ecuațiile de bază ale magnetofluidodinamicii

Bazele *magnetofluidodinamicii* (denumită și *magnetohidrodinamică* sau, încă, *magnetodinamica fluidelor*) au fost puse în jurul anului 1930 de către astrofizicienii care studiau originea energiei solare și a stelelor. Primele cercetări aveau ca obiect magnetismul solar, originea petelor solare și furtunile magnetice care însoțesc protuberanțele solare. Cităm, în acest sens, lucrările de pionierat ale lui Larmor, Cowling, Ferraro ș.a. În cel de al patrulea deceniu al secolului XX se fac primele experimente de laborator privind fenomenele ce au loc într-un fluid conductor sub acțiunea unui câmp magnetic.

Magnetodinamica fluidelor devine știință de sine stătătoare odată cu stabilirea sistemului fundamental de ecuații pentru modelul magnetofluidului în câmp exterior, lucru realizat de astrofizicianul suedez *Hannes Olaf Gosta Alfvén* în anul 1942 (Premiul Nobel pentru fizică în 1970).

Așa cum am menționat mai sus, ecuațiile fundamentale ce descriu comportarea unui astfel de sistem se obțin prin fuziunea ecuațiilor mediilor continue deformabile (fluide) și cele ale câmpului electromagnetic (ecuațiile lui Maxwell).

Să admitem că modelul analizat este un fluid conductor, de conductivitate  $\lambda$ , care se deplasează cu viteza  $\mathbf{v}$  în câmpul electromagnetic exterior  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ . Fluidul are densitatea masică  $\rho$ , densitatea de sarcină  $\rho_e$ , iar presiunea statică din interiorul său este  $p$ . Dacă  $\mathbf{j}$  este suma densităților curenților de conducție și de convecție din fluid, vom admite că, în raport cu  $\mathbf{j}$ , curentul de deplasare  $\partial\mathbf{D}/\partial t$  poate fi neglijat. Ecuațiile lui Maxwell se vor scrie atunci

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} ; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 ; \quad \nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \mathbf{j} ; \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e . \quad (5.1)$$

La acestea se adaugă legea lui Ohm care, pentru un mediu în mișcare cu viteză mică în comparație cu viteza luminii, are forma (vezi

3.136)

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}' = \lambda (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) . \quad (5.2)$$

Utilizând ecuațiile lui Maxwell și legea lui Ohm, avem

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{j} = \lambda \nabla \times \mathbf{E} + \lambda \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

sau, dacă explicităm  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{B}$ ,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \nu_m \Delta \mathbf{B} , \quad (5.3)$$

unde mărimea  $\nu_m = 1/\lambda\mu$  se numește *coeficient de viscozitate magnetică* a fluidului. (Denumirea vine de la similitudinea dintre ecuația (5.3) și cea a vârtejului din dinamica fluidelor, unde apare câmpul vectorial  $\Omega = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}$ ). Ecuația (5.3) se numește *ecuația inducției*.

Pentru a obține *ecuația de mișcare* a magnetofluidului, vom adăuga la ecuația de mișcare a unui fluid *perfect vâscos* (sau *newtonian*) termenul  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ , reprezentând densitatea forței magnetice :

$$\mathbf{f}_{em} = \rho_e (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \simeq \rho_e \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}.$$

Apelând la cunoștințele de mecanică a fluidelor ale cititorului, vom scrie așadar ecuația de mișcare sub forma

$$\rho \mathbf{a} = \rho \mathbf{F} - \nabla p + (\xi + \eta) \nabla \theta' + \eta \Delta \mathbf{v} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (5.4)$$

unde  $\xi$ ,  $\eta$  sunt coeficienții de viscozitate dinamică,  $\mathbf{F}$  este forța masică specifică de natură neelectromagnetică (de pildă, cea gravitațională), iar  $\theta' = \nabla \cdot \mathbf{v}$ .

O altă ecuație esențială este *ecuația de continuitate* :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 , \quad (5.5)$$

care exprimă legea conservării masei (respectiv a sarcinii electrice, dacă înlocuim  $\rho$  prin  $\rho_e$ ).

La cele de mai sus trebuie să adăugăm *ecuația energiei*. Aceasta indică faptul că, în unitatea de volum a fluidului și în unitatea de timp, ca urmare a viscozității, conductibilității termice și pierderilor Joule, se disipă cantitatea de căldură  $\rho T \, ds/dt$ , adică

$$\rho T \left( \frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) s \right) = T'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} , \quad (5.6)$$

unde  $s$  este entropia unității de masă a fluidului,  $\kappa$  este coeficientul de termoconducție, iar  $T'_{ik}$  este *tensorul vâscos al tensiunilor*, definit prin

$$T_{ik} = -p \, \delta_{ik} + T'_{ik} ,$$

în care  $T_{ik}$  este *tensorul tensiunilor*. La fluidele omogene și izotrope, tensorul  $T'_{ik}$  este dat de

$$T'_{ik} = \xi \, \theta' \, \delta_{ik} + 2\eta \, e'_{ik} ,$$

unde

$$e'_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right)$$

este *tensorul vitezei de deformare*.

Ecuatiile de mai sus nu sunt suficiente pentru a caracteriza fluidul din punct de vedere termodinamic. De aceea se face apel la *ecuația de stare* care se scrie, în general, sub forma

$$f(p, \rho, T) = 0 . \quad (5.7)$$

Ecuatiile (5.3) - (5.7), împreună cu ecuația (5.1)<sub>4</sub>, formează *sistemul fundamental* de ecuații ale magnetodinamicii fluidelor.

Dacă fluidul este perfect ( $\xi = \eta = 0$ ) și infinit conductor ( $\lambda \rightarrow \infty$  sau  $\nu_m \rightarrow 0$ ), atunci procesul este izentrop ( $s = \text{const.}$ ). Altfel spus, în acest caz nu avem procese disipative, situație în care ecuațiile de mai sus se reduc la sistemul :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) ; \quad \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_e ; \quad \rho \mathbf{a} = \rho \mathbf{F} - \nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} ;$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 ; \quad \frac{ds}{dt} = 0 ; \quad f(p, \rho, T) = 0 . \quad (5.8)$$

Utilizând sistemul de ecuații (5.8), în cele ce urmează vom trece în revistă câteva aplicații semnificative.

### §5.3. ”Înghetarea” liniilor câmpului magnetic

Să admitem că fluidul ionizat ce se deplasează în câmpul  $\mathbf{B}$  cu viteza  $\mathbf{v}$  are conductivitatea electrică foarte mare ( $\lambda \rightarrow \infty$ ). În acest caz, dezvoltarea membrului al doilea al ecuației (5.8)<sub>1</sub> conduce la

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} ,$$

sau

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = -\mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} . \quad (5.9)$$

Înmulțind (5.9) cu  $1/\rho$  și utilizând ecuația de continuitate, găsim

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{d\mathbf{B}}{dt} &= \frac{\mathbf{B}}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\mathbf{B}}{\rho^2} \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \left( \frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = \\ &= \frac{\mathbf{B}}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} + \left( \frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} \end{aligned}$$

adică

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{B}}{\rho} \right) = \left( \frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} \quad (5.10)$$

asemănătoare cu *ecuația de difuzie* a lui Beltrami.

Pentru a scoate în evidență semnificația fizică a acestei ecuații, să considerăm două linii de curent  $\Gamma$  și  $\Gamma'$ , astfel ca toate particulele de fluid ce se găsesc pe  $\Gamma$  la momentul  $t$  să se găsească pe  $\Gamma'$  la momentul  $t + dt$ . Fie  $\delta \mathbf{l}$  un element al liniei  $\Gamma$  și  $\delta \mathbf{l}'$  un element al liniei  $\Gamma'$ , format din același număr de particule ca și  $\delta \mathbf{l}$  (Fig.5.1). Pentru ca liniile de curent să se conserve, va trebui să avem

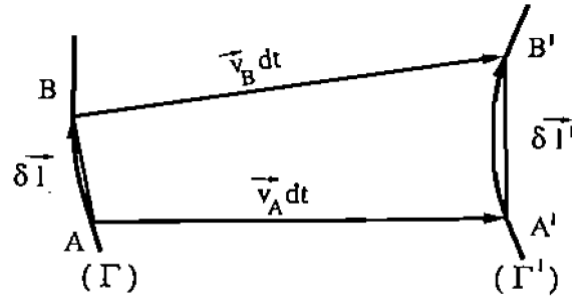
$$\delta \mathbf{l}' - \delta \mathbf{l} = \frac{d}{dt} (\delta \mathbf{l}) dt . \quad (5.11)$$

Dacă  $\mathbf{v}_A$  și  $\mathbf{v}_B$  sunt vitezele de deplasare ale punctelor  $A$  și  $B$  de pe curba  $\Gamma$  (în raport cu originea unui reper cartezian ortogonal), deplasare ce are loc în intervalul temporal  $dt$ , putem scrie :

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{l}' &= \delta \mathbf{l} + \mathbf{v}_B dt - \mathbf{v}_A dt = \delta \mathbf{l} + \mathbf{v}(\mathbf{r} + \delta \mathbf{l}) dt - \mathbf{v}_A dt = \\ &= \delta \mathbf{l} + [\mathbf{v}_A + (\delta \mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{v}_A + \dots] dt - \mathbf{v}_A dt \simeq \\ &\simeq \delta \mathbf{l} + (\delta \mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{v}_A dt ,\end{aligned}$$

deci

$$\frac{d}{dt} (\delta \mathbf{l}) = (\delta \mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{v} . \quad (5.12)$$



**Fig. 5.1.**

Comparând ecuațiile (5.10) și (5.12), constatăm că acestea au aceeași formă, adică variația în timp și spațiu a vectorilor  $\delta \mathbf{l}$  și  $\mathbf{B}/\rho$  urmează aceeași lege. Prin urmare, conservarea liniilor de curent ale fluidului presupune conservarea liniilor câmpului  $\mathbf{B}$  (de fapt, ale unui câmp coliniar cu  $\mathbf{B}$ ). Acestea din urmă se deplasează odată cu fluidul, ca și cum ar fi "lipite" de liniile de curent. Fenomenul este cunoscut sub numele de "*înghețarea liniilor câmpului magnetic*".

De aici rezultă (ca o formulare echivalentă a concluziei de mai sus) că se conservă fluxul  $\Phi_m$  al inducției magnetice care traversează o suprafață  $S(t)$  ce se sprijină pe un contur închis format din particule de fluid (contur material). Într-adevăr, având în vedere cele prezentate



în §3.9, consacrat ecuațiilor câmpului electromagnetic pentru medii în mișcare, putem scrie

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \left[ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right] \cdot d\mathbf{S} = 0 ,$$

adică  $\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \text{const.}$

#### §5.4. Unde magnetohidrodinamice

După cum se știe din mecanica mediilor continue, într-un mediu omogen (aer) perturbațiile mici se propagă sub formă de unde de compresie numite *unde sonore*. Viteza acestor unde este

$$v_s = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S} , \quad (5.13)$$

unde  $p$  este presiunea mecanică,  $\rho$  densitatea mediului, iar indicele  $S$  arată că derivata din (5.13) se consideră la entropie constantă (proces izentrop).

Dacă mediul este conductor, alături de presiunea mecanică  $p$  va exista o presiune magnetică  $B^2/2\mu$  (vezi paragraful următor), prin urmare ne așteptăm ca alături de undele sonore, ce se propagă cu viteza de fază  $v_s$  dată de (5.13), să existe niște unde specifice, datorate proprietății fluidului de a fi conductor, care se propagă cu viteza

$$v \sim \sqrt{\frac{B^2}{2\mu\rho}} . \quad (5.14)$$

Pentru a determina natura și proprietățile acestor unde, să luăm ca model un fluid conductor compresibil, omogen, aflat într-un câmp de inducție magnetică constant și uniform  $\mathbf{B}_0$ . Vom presupune că rezistența electrică, conductivitatea termică și viscozitatea sunt atât de mici, încât disiparea energiei prin aceste efecte poate fi neglijată în primă aproximație. În cazul acesta, din (5.6) deducem  $s = \text{const.}$ , adică procesul poate fi considerat *izentrop*.

Pentru a studia propagarea micilor perturbații într-un astfel de model de mediu, vom face apel la ecuațiile (vezi 5.8)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) ; \\ \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] &= -\nabla p - \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) ; \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0 ,\end{aligned}\tag{5.15}$$

la care se adaugă ecuația de conservare a entropiei (5.8)<sub>5</sub> și ecuația de stare (5.8)<sub>6</sub>. Să presupunem :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_o + \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t) ; \quad \rho = \rho_o + \rho_1(\mathbf{r}, t) ; \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t) , \tag{5.16}$$

unde  $\mathbf{B}_o$ ,  $\rho_o$  sunt valorile constante, de echilibru, ale mărimilor respective, iar  $\mathbf{B}_1$ ,  $\rho_1$  sunt mici variații ale acestora în undă. Viteza  $\mathbf{v}$ , egală cu zero la echilibru, este și ea o mărime mică  $\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t)$ , de același ordin de mărime cu  $\mathbf{B}_1$ ,  $\rho_1$ .

Introducând (5.16) în (5.15) și reținând doar mărimile mici de ordinul unu, obținem următorul sistem de *ecuații liniare* :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_o) &= 0 ; \\ \rho_o \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + v_s^2 \nabla \rho_1 + \frac{1}{\mu} \mathbf{B}_o \times (\nabla \times \mathbf{B}_1) &= 0 ; \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_o \nabla \cdot \mathbf{v}_1 &= 0 .\end{aligned}\tag{5.17}$$

Derivând în raport cu timpul ecuația de mișcare și utilizând celelalte două ecuații, obținem următoarea ecuație în  $\mathbf{v}_1$

$$\rho_o \frac{\partial^2 \mathbf{v}_1}{\partial t^2} - v_s^2 \rho_o \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}_1) + \frac{1}{\mu} \mathbf{B}_o \times \{ \nabla \times [\nabla \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_o)] \} = 0 .$$

Dacă introducem *viteza Alfvén* prin relația

$$\mathbf{v}_A = \frac{\mathbf{B}_o}{\sqrt{\mu\rho_o}} , \quad (5.18)$$

ecuația de mai sus se mai scrie

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}_1}{\partial t^2} - v_s^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}_1) + \mathbf{v}_A \times \{ \nabla \times [\nabla \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_A)] \} = 0 . \quad (5.19)$$

Să presupunem că  $\mathbf{v}_1$  se propagă sub forma unei unde plane de tipul

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}_1^o e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} . \quad (5.20)$$

Ultimul termen din (5.19) va fi atunci

$$\begin{aligned} & \mathbf{v}_A \times \{ \nabla \times [-\mathbf{v}_A \nabla \cdot \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_A \cdot \nabla) \mathbf{v}_1] \} = \\ & = \mathbf{v}_A \times \{ -[\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}_1)] \times \mathbf{v}_A + (\mathbf{v}_A \cdot \nabla) \nabla \times \mathbf{v}_1 \} = \\ & = \mathbf{v}_A \times [\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) \times \mathbf{v}_A - (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{k})(\mathbf{k} \times \mathbf{v}_1)] = \\ & = v_A^2 \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) - (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{k})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) \mathbf{v}_A - (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{k})[(\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_1) \mathbf{k} - (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{k}) \mathbf{v}_1] , \end{aligned}$$

iar ecuația (5.19), după simplificarea cu  $e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ , devine

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \mathbf{v}_1^o + (v_s^2 + v_A^2)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1^o) \mathbf{k} + \\ & + (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{k})[(\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{k}) \mathbf{v}_1^o - (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_1^o) \mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1^o) \mathbf{v}_A] = 0 . \end{aligned} \quad (5.21)$$

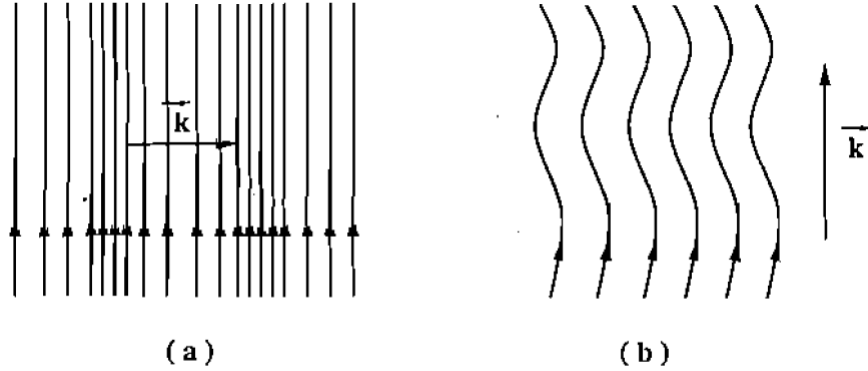
Dacă  $\mathbf{v}_A \perp \mathbf{k}$ , ultimul termen este nul și obținem ca soluție pentru  $\mathbf{v}_1^o$  o undă numită *magnetosonoră longitudinală*, a cărei viteză de fază este

$$u_{long} = \sqrt{v_s^2 + v_A^2} . \quad (5.22)$$

Dacă  $\mathbf{v}_A \parallel \mathbf{k}$ , ecuația (5.221) se reduce la

$$(v_A^2 k^2 - \omega^2) \mathbf{v}_1^o + \left( \frac{v_s^2}{v_A^2} - 1 \right) k^2 (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_1^o) \mathbf{v}_A = 0 . \quad (5.23)$$

În acest caz sunt posibile două tipuri de mișcări ondulatorii: o undă ordinară longitudinală ( $\mathbf{v}_1^o \parallel \mathbf{k}, \mathbf{v}_A$ ) cu viteza de fază egală cu  $v_s$  și una transversală cu viteza de fază egală cu viteza Alfvén  $\mathbf{v}_A$ . Această *undă Alfvén* este un fenomen pur magnetohidrodinamic, ce depinde numai de câmpul magnetic și de densitatea fluidului. Pentru orice valori ale lui  $\mathbf{B}$  realizabile în condiții de laborator  $v_A \ll v_s$ , în timp ce în condiții cosmice  $v_A$  poate avea valori foarte mari, datorită densităților foarte mici. În fotosfera solară, de pildă,  $\rho \sim 10^{-7} \text{ g/cm}^3$ , astfel că  $v_A \simeq 10^3 B_o \text{ cm/s}$ . Câmpurile magnetice solare sunt de ordinul 1-2 Gs la suprafața astrului, având valori mult mai mari în jurul petelor solare. Pentru comparație, menționăm că viteza sunetului în fotosferă este  $\simeq 10^4 \text{ m/s}$ .



**Fig. 5.2.**

Câmpurile magnetice ale celor trei tipuri de unde definite mai sus pot fi determinate din ecuația (5.17)<sub>1</sub> :

$$\mathbf{B}_1 = \begin{cases} \frac{k}{\omega} v_1 \mathbf{B}_o & \text{pentru } \mathbf{k} \perp \mathbf{B}_o ; \\ 0 & \text{pentru } \mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_o \text{ (longit.)} ; \\ -\frac{k}{\omega} v_1 \mathbf{B}_o & \text{pentru } \mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_o \text{ (transv.)} , \end{cases} \quad (5.24)$$

unde am avut în vedere faptul că  $\mathbf{v}_A$  și  $\mathbf{B}_o$  sunt vectori coliniari. Unda magnetoacustică, deplasându-se perpendicular pe  $\mathbf{B}_o$ , produce compresii și rarefieri ale liniilor câmpului  $\mathbf{B}_o$ , fără a le schimba direcția (Fig.5.2 a), în timp ce unda Alfvén paralelă cu  $\mathbf{B}_o$  face ca liniile de

forță să oscileze lateral, înainte și înapoi (Fig.5.2 b). În fiecare dintre cele două cazuri, ținând seama de ipoteza privind lipsa viscozității magnetice, liniile de câmp sunt ”înghețate” în fluid.

Dacă ținem seama de pierderile prin viscozitate și efect Joule, primele două ecuații (5.17) vor trebui înlocuite cu

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_o) + \frac{1}{\lambda\mu} \Delta \mathbf{B}_1 ; \\ \rho_o \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} &= -v_s^2 \nabla \rho_1 - \frac{1}{\mu} \mathbf{B}_o \times (\nabla \times \mathbf{B}_1) + \eta \Delta \mathbf{v}_1 .\end{aligned}\quad (5.25)$$

Pentru a analiza efectul produs prin adăugarea celor doi termeni disipativi în ecuațiile (5.25), să presupunem că  $\mathbf{B}_1$  și  $\mathbf{v}_1$  se propagă prin unde plane de forma (5.20). Avem atunci :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} - \frac{1}{\lambda\mu} \Delta \mathbf{B}_1 &= \left( -i\omega + \frac{k^2}{\lambda\mu} \right) \mathbf{B}_1 = \\ &= -i\omega \left( 1 + \frac{k^2}{\omega\lambda\mu} \right) \mathbf{B}_1 = \left( 1 + \frac{ik^2}{\omega\lambda\mu} \right) \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} ; \\ \rho_o \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} - \eta \Delta \mathbf{v}_1 &= -i\omega \rho_o \left( 1 + \frac{ik^2\eta}{\omega\rho_o} \right) \mathbf{v}_1 = \rho_o \left( 1 + \frac{ik^2\eta}{\omega\rho_o} \right) \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} ,\end{aligned}$$

prin urmare ecuațiile (5.25) sunt echivalente cu

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} &= \frac{1}{1 + \frac{ik^2}{\omega\lambda\mu}} \nabla \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_o) ; \\ \rho_o \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} &= \frac{1}{1 + \frac{ik^2\eta}{\omega\rho_o}} \left[ -v_s^2 \nabla \rho_1 - \frac{1}{\mu} \mathbf{B}_o \times (\nabla \times \mathbf{B}_1) \right] .\end{aligned}\quad (5.26)$$

În urma unui raționament cu totul analog celui ce ne-a condus la relația (5.21), de aici rezultă că vom găsi aceeași ecuație, cu diferența că de data aceasta  $v_s^2$  este amplificat cu factorul  $(1 + ik^2/\lambda\mu\omega)$ , iar  $\omega^2$  este amplificat cu  $(1 + ik^2/\omega\rho_o)(1 + ik^2/\omega\lambda\mu)$ .

Să aplicăm acest rezultat în cazul undei Alfvén. Din (5.23), pentru  $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_A = 0$ , rezultă

$$k^2 v_A^2 = \omega^2 \left( 1 + \frac{ik^2 \eta}{\omega \rho_o} \right) \left( 1 + \frac{ik^2}{\lambda \mu \omega} \right). \quad (5.27)$$

Dacă termenii corectivi datorati rezistenței electrice și viscozității sunt mici, putem aproxima

$$k^2 v_A^2 \simeq \omega^2 \left[ 1 + \frac{ik^2}{\omega} \left( \frac{\eta}{\rho_o} + \frac{1}{\lambda \mu} \right) \right],$$

de unde

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{\omega^2}{v_A^2 - i\omega \left( \frac{\eta}{\rho_o} + \frac{1}{\lambda \mu} \right)} = \frac{\omega^2 \left[ v_A^2 + i\omega \left( \frac{\eta}{\rho_o} + \frac{1}{\lambda \mu} \right) \right]}{v_A^4 + \omega^2 \left( \frac{\eta}{\rho_o} + \frac{1}{\lambda \mu} \right)^2} \simeq \\ &\simeq \frac{\omega^2}{v_A^2} \left[ 1 + \frac{i\omega}{v_A^2} \left( \frac{\eta}{\rho_o} + \frac{1}{\lambda \mu} \right) \right]. \end{aligned}$$

Deci :

$$\begin{aligned} k &= \frac{\omega}{v_A} \left[ 1 + \frac{i\omega}{v_A^2} \left( \frac{\eta}{\rho_o} + \frac{1}{\lambda \mu} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \simeq \\ &\simeq \frac{\omega}{v_A} + i \frac{\omega^2}{2v_A^3} \left( \frac{\eta}{\rho_o} + \frac{1}{\lambda \mu} \right). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Această relație exprimă numărul de undă  $k$  în funcție de pulsația  $\omega$ , deci este *relația de dispersie* pentru cazul studiat. Numărul de undă fiind complex, rezultă că unda este atenuată. Se observă că atenuarea crește rapid cu pulsația, dar descrește și mai rapid cu câmpul de inducție magnetică. Dacă efectul disipativ este foarte puternic, adică dacă  $k^2 \eta / \omega \rho_o \gg 1$ ,  $k^2 / \lambda \mu \omega \gg 1$ , membrul drept al relației (5.27) devine negativ, ceea ce înseamnă că numărul de undă  $k$  devine pur imaginar. În acest caz unda se atenuează rapid, independent de amplitudinea câmpului  $B_o$ .

### §5.5. Unele probleme ale magnetohidrostaticii

În absența surselor externe, într-un fluid conductor imobil este posibilă prezența unui câmp magnetic *static* numai în cazul în care conductivitatea mediului este infinită, adică dacă câmpul magnetic este ”înghețat” în mediu (vezi &5.3). (Dacă mediul ar avea o conductivitate  $\lambda$  finită, energia magnetică s-ar transforma în căldură Joule și s-ar disipa).

*Magnetohidrostatica* studiază condițiile de echilibru ale unui fluid conductor, aflat sub influența forței de presiune (hidrostatică), a forței Lorentz și a forței gravitaționale. În cazul static ( $\mathbf{v} = 0$ ), ecuația de mișcare (5.8)<sub>3</sub> se reduce la

$$-\nabla p + \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{g} = 0, \quad (5.29)$$

în care  $\rho \mathbf{g}$  este densitatea forței gravitaționale. De aici se vede că, dacă forța gravifică este neglijabilă în comparație cu celelalte forțe, pentru a avea echilibru trebuie ca  $\mathbf{B}$  și  $\mathbf{j} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B}$  să fie perpendiculari pe  $\nabla p$ , adică  $\mathbf{B}$  și  $\mathbf{j}$  să fie plasați pe suprafața de presiune constantă  $p = \text{const.}$

În cele ce urmează vom da două exemple de aplicații ale acestui formalism, unul întâlnit în practica de laborator, iar cel de al doilea din domeniul astrofizicii.

#### Termoizolarea magnetică. Efectul ”pinch”

Alegem și de data aceasta ca model de studiu un fluid ideal (se neglijează efectele disipative) în echilibru ( $\mathbf{v} = 0$ ). Neglijând forțele de natură gravitațională, ecuația de mișcare (5.8)<sub>3</sub> conduce la

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} \times \mathbf{B}.$$

Dar (vezi A.43)

$$\mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{2} \nabla B^2 - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B},$$

deci putem scrie

$$\nabla \left( p + \frac{1}{2\mu} B^2 \right) = \frac{1}{\mu} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}. \quad (5.30)$$

De aici rezultă că expresia  $p_m = B^2/2\mu$  are dimensiunea unei presiuni ; o vom numi *presiune magnetică*. În unele situații geometrice simple, cum este cea în care câmpul are o singură componentă, membrul drept al ecuației (5.30) se anulează și rezultă

$$p + \frac{1}{2\mu}B^2 = \text{const.} , \quad (5.31)$$

deci în cazul static suma dintre presiunea mecanică și cea magnetică este constantă. Pentru exemplificare să alegem  $|\mathbf{B}| \equiv B_x = B$ , situație în care  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  conduce la  $\partial B / \partial x = 0$ , prin urmare

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \left( B \frac{\partial}{\partial x} \right) (B \mathbf{i}) = B \frac{\partial B}{\partial x} \mathbf{i} = 0 .$$

Potrivit lui (5.31), orice variație a presiunii mecanice trebuie compensată printr-o variație de sens opus a presiunii magnetice. Dacă magnetofluidul trebuie confinat (menținut) într-o anumită regiune, astfel încât  $p$  scade repede la zero în afara limitelor regiunii respective, presiunea magnetică  $p_m$  trebuie să crească la fel de rapid pentru a confina fluidul. Acesta este principiul efectului "pinch", care constă în confinarea unui fluid conductor (plasmă) de către câmpul magnetic propriu, creat de curenții electrici din interiorul mediului. Efectul prezintă un deosebit interes în cercetările termionucleare. Să ne oprim, pe scurt, asupra efectului "pinch".

Considerăm un cilindru infinit din fluidul conductor, orientat după axa  $Oz$  și fie  $j_z = j(r)$  densitatea de curent axială, iar  $B_\theta = B(r)$  câmpul de inducție magnetică azimutal creat de  $j(r)$ . Ne punem problema dacă poate exista o stare de echilibru în care fluidul să fie confinat într-un cilindru de rază  $r = R$  prin acțiunea câmpului propriu  $\mathbf{B}$ .

Geometria problemei ne cere să lucrăm în coordonate cilindrice  $r, \theta, z$ . Observăm, în prealabil, că membrul drept al relației (5.30) se poate scrie

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \left( B_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (B_\theta \mathbf{u}_\theta) = \frac{B^2}{r} \frac{d\mathbf{u}_\theta}{d\theta} = - \frac{B^2}{r} \mathbf{u}_r ,$$



unde  $\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{k}$  sunt versorii celor trei direcții de coordonate. Proiectând ecuația (5.20) pe direcția  $r$ , avem atunci

$$\frac{d}{dr} \left( p + \frac{B^2}{2\mu} \right) = - \frac{B^2}{\mu r} ,$$

care se mai poate scrie

$$\frac{dp}{dr} = - \frac{1}{2\mu r^2} \frac{d}{dr} (r^2 B^2) , \quad (5.32)$$

cu soluția

$$p(r) = p(o) - \frac{1}{2\mu} \int_o^r \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 B^2) dr , \quad (5.33)$$

unde  $p_o$  este presiunea fluidului pentru  $r = 0$ . Dacă fluidul este confinat în coloana cilindrică  $r \leq R$ , presiunea  $p$  scade la zero la limita  $r = R$ , prin urmare

$$p(o) = \frac{1}{2\mu} \int_o^R \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 B^2) dr . \quad (5.34)$$

Înlocuind (5.34) în (5.33), obținem

$$p(r) = \frac{1}{2\mu} \int_r^R \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 B^2) dr . \quad (5.35)$$

*Presiunea medie*  $\langle p \rangle$  din interiorul cilindrului poate fi exprimată în funcție de intensitatea  $I$  a curentului care circulă prin fluid și de raza  $R$ . Prin definiție

$$\langle p \rangle = \frac{\int_o^R r p(r) dr}{\int_o^R r dr} = \frac{2}{R^2} \int_o^R r p(r) dr .$$

Integrând prin părți și utilizând (5.32), avem :

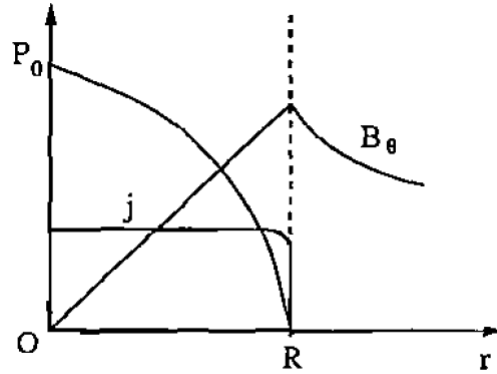
$$\langle p \rangle = \frac{2}{R^2} \left[ p \frac{r^2}{2} \Big|_o^R - \frac{1}{2} \int_o^R r^2 dp \right] =$$

$$= \frac{1}{2\mu R^2} \int_0^R d(r^2 B^2) = \frac{1}{2\mu} B^2 \Big|_R . \quad (5.36)$$

Dar, în conformitate cu legea Biot-Savart-Laplace, câmpul de inducție al unui curent infinit, rectiliniu, de intensitate  $I$ , la distanța  $r$  de axul cilindrului, este  $B = \mu I / 2\pi r$ , deci avem în fine

$$\langle p \rangle = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 R^2} . \quad (5.37)$$

Atragem atenția asupra faptului că, potrivit lui (5.36), presiunea medie este egală cu presiunea la suprafața cilindrului de fluid.



**Fig. 5.3.**

În experimentele termonucleare se lucrează cu plasmă fierbînți ce au temperaturi de ordinul  $10^8 \text{ K}$  și densități de  $10^{15}$  particule/cm<sup>3</sup>. Unor astfel de plasmă le corespund presiuni  $p = NkT \sim 14 \text{ atm}$ . Pentru a le confina, dacă  $B|_R = 20 \text{ kGs}$ , trebuie să avem  $I \simeq (9 \cdot 10^4 R) \text{ A}$ , unde  $R$  se exprimă în  $\text{cm}$ . Prin urmare, pentru confinarea plasmei sunt necesare intensități de curent foarte mari.

Să studiem variația presiunii în direcție radială. Vom admite că densitatea de curent  $j(r)$  este constantă pentru  $r < R$ . În acest caz, câmpul  $B$  într-un punct în interiorul coloanei de plasmă va fi

$$B(r) = \frac{\mu I}{2\pi R^2} r \quad (r < R) ,$$

relație care introdusă în (5.35) ne dă

$$p(r) = \frac{\mu I^2}{4\pi^2 R^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \quad (5.38)$$

ceea ce exprimă faptul că dependența presiunii de  $r$  este de formă parabolică.

Dependența de  $r$  a diverselor mărimi ce intervin în considerațiile de mai sus este dată în Fig. 5.3.

### Câmpuri "fără forță"

În problemele de astrofizică prezintă un deosebit interes acele câmpuri magnetice care nu exercită acțiuni mecanice asupra mediului conductor, adică cele caracterizate prin

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = 0, \quad (5.39)$$

de unde rezultă

$$\nabla \times \mathbf{B} = \alpha(r) \mathbf{B}. \quad (5.40)$$

Aceste câmpuri au căpătat denumirea de "lipsite de forță", sau "fără forță" ("force-free fields" în limba engleză). Proprietățile pe care le posedă câmpurile "fără forță" fac ca existența lor în natură să fie foarte probabilă. De pildă, o astfel de proprietate se presupune a avea câmpul staționar relativ puternic într-o regiune în care presiunea fluidului ionizat (plasmă) este mică, cum este situația deasupra petelor solare. Într-adevăr, cum temperatura petelor solare este mai mică decât temperatura înconjurătoare, iar  $p = NkT$ , rezultă că și presiunea este mai mică.

Pentru a explica echilibrul petelor solare trebuie, deci, să justificăm faptul că plasma din vecinătatea petelor solare, cu temperatură mai mare, nu poate pătrunde în interiorul acestora.

În cele ce urmează vom dovedi că un câmp "lipsit de forță", cu  $\alpha = \text{const.}$  reprezintă - într-un sistem închis - o stare cu energie minimă. Pentru aceasta vom arăta, în prealabil, că integrala

$$I_1 = \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, d\tau = \int_V \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{A} \, d\tau, \quad (5.41)$$

unde  $V$  este un volum fix, este o constantă a mișcării pentru sistemul (5.8) (o integrală primă). Avem :

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{A} \, d\tau = \int_V \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \nabla \times \mathbf{A} \, d\tau + \int_V \mathbf{A} \cdot \nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \, d\tau .$$

Dar, în conformitate cu (5.8)<sub>1</sub>

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \times \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \nabla \times [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})] ,$$

sau, dacă alegem în mod convenabil transformarea de etalon,

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) . \quad (5.42)$$

De aici rezultă

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0 , \quad (5.43)$$

prin urmare

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{A} \, d\tau = \int_V \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \nabla \times \mathbf{A} \, d\tau + \int_V \nabla \cdot \left( \mathbf{A} \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \, d\tau .$$

Prima integrală se anulează potrivit lui (5.43), iar a doua este de asemenea nulă căci, potrivit teoremei Green-Gauss-Ostrogradski

$$\int_V \nabla \cdot \left( \mathbf{A} \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \, d\tau = \oint_S \mathbf{A} \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = 0 , \quad (5.44)$$

deoarece sistemul este închis, caz în care mișcarea din interiorul sistemului nu trebuie să afecteze potențialul vector din exteriorul acestuia și, cum  $\mathbf{A}$  se presupune a fi o funcție continuă,  $\partial \mathbf{A} / \partial t$  trebuie să se anuleze pe suprafața  $S$  se mărginește domeniul de integrare.

Să determinăm acum extremum-ul energiei magnetice

$$W_m = \frac{1}{2\mu} \int_V B^2 \, d\tau, \quad (5.45)$$

în condițiile existenței integralei de legătură (5.51). O asemenea judecată este o problemă de *extremum condiționat* și constă în aflarea extremum-ului unei funcționale, în condițiile în care o anumită integrală ia o valoare dată (legătură). (Tipică în acest sens este cea cunoscută sub numele de *problema izoperimetrică* : dată fiind o curbă plană închisă, de lungime fixă, să se determine forma pe care trebuie s-o aibă curba pentru ca aria cuprinsă în perimetrul ei să fie maximă. Aici condiția de legătură este  $L = \int ds = \text{const.}$ , unde  $L$  este lungimea curbei, iar soluția problemei este, evident, cercul).

Amplificând (5.41) cu un multiplicator lagrangean  $\beta$  și adunând rezultatul la (5.45), avem :

$$\Phi = \int_V \left[ \frac{1}{2\mu} (\nabla \times \mathbf{A})^2 - \beta \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{A} \right] d\tau . \quad (5.46)$$

Condițiile necesare de existență a extremum-ului funcționalei (5.46) sunt exprimate prin ecuațiile lui Euler :

$$\frac{\partial f}{\partial A_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial f}{\partial A_{i,k}} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial f}{\partial A_{i,t}} \right) = 0 , \quad (5.47)$$

unde

$$f = \frac{1}{2\mu} (\nabla \times \mathbf{A})^2 - \beta \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{A} ,$$

iar  $A_{i,k} = \partial A_i / \partial x_k$  ;  $A_{i,t} = \partial A_i / \partial t$ . Efectuând calculele, găsim

$$\frac{\partial f}{\partial A_i} = -\beta (\nabla \times \mathbf{A})_i = -\beta B_i ;$$

$$\frac{\partial f}{\partial A_{i,k}} = \frac{1}{\mu} \epsilon_{mki} B_m - \beta \epsilon_{mki} A_m ;$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial f}{\partial A_{i,k}} \right) = \frac{1}{\mu} \epsilon_{mki} B_{m,k} - \beta \epsilon_{mki} A_{m,k} = -\frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{B})_i + \beta B_i .$$

Înlocuind aceste rezultate în (5.47) și notând  $2\mu\beta = \alpha = \text{const.}$ , avem în definitiv

$$\nabla \times \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B} ,$$

adică extremum-ul energiei magnetice se realizează pentru un câmp  $\mathbf{B}$  "lipsit de forță". De aici decurge, pe de o parte, faptul că un astfel de câmp este relativ stabil față de micile perturbații, iar pe de alta că un sistem în care forțele magnetice sunt dominante și în care există un mecanism de disipare a mișcărilor fluidului, câmpurile "fără forță" (cu  $\alpha = \text{const.}$ ) sunt configurații finale *naturale*.

Prin urmare, dacă pierderile Joule sunt absente, dar mișcarea se poate amortiza datorită viscozității sau altor cauze, stările finale cele mai probabile sunt cele corespunzătoare unor câmpuri "lipsite de forță".

### Probleme

1. Să se arate că expresia  $I_2 = \int_V \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \, d\tau$ , unde  $V$  este un volum fix ocupat de un magnetofluid ideal, este - alături de  $I_1$  - o constantă a mișcării pentru sistemul fundamental de ecuații (5.8).

2. Ecuația de mișcare pentru o plasmă electronică, în care se ține seama de fenomenul ciocnirii între electroni, dar se neglijează presiunea hidrostatică, este

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{e}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nu \mathbf{v} ,$$

unde  $\nu$  este frecvența de ciocnire. Să se arate că în prezența unor câmpuri  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  externe, statice și uniforme, legea lui Ohm se va scrie

$$j_i = \lambda_{ik} E_k \quad (i, k = 1, 2, 3) ,$$

unde tensorul conductivității  $\lambda_{ik}$  este

$$\lambda_{ik} = \frac{\omega_p^2}{\nu \left(1 + \frac{\omega_B^2}{\nu^2}\right)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\omega_B}{\nu} & 0 \\ -\frac{\omega_B}{\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{\omega_B^2}{\nu^2} \end{pmatrix} ,$$

în care  $\omega_p$  este pulsația plasmei electronice, iar  $\omega_B$  este pulsația precesiei Larmor.

## PARTEA A DOUA

## ELECTRODINAMICA ÎN TRATARE RELATIVIST-COVARIANTĂ





## CUPRINSUL PĂRȚII A DOUA

<b>CAPITOLUL VI. BAZELE EXPERIMENTALE ALE</b>	
<b>TEORIEI RELATIVITĂȚII RESTRÂNSE ....</b>	<b>277</b>
6.1. Generalități .....	277
6.2. Aberația luminii .....	279
6.3. Efectul Doppler .....	281
6.4. Experimentul lui Fizeau .....	283
6.5. Experimentul lui Michelson .....	283
 <b>CAPITOLUL VII. PRINCIPIILE TEORIEI</b>	
<b>RELATIVITĂȚII RESTRÂNSE .....</b>	<b>288</b>
7.1. Postulatele lui Einstein .....	288
7.2. Transformarea Lorentz-Einstein .....	291
7.3. Transformarea Lorentz-Herglotz .....	296
Probleme .....	298
 <b>CAPITOLUL VIII. CONSECINȚE ALE TRANSFORMĂRII</b>	
<b>LORENTZ-EISTEIN .....</b>	<b>299</b>
8.1. Contractia lungimilor .....	299
8.2. Dilatarea duratei .....	301
8.3. Relativitatea simultaneității .....	303
8.4. Efectul Doppler relativist .....	304
8.5. Formulele de compunere a vitezelor și accelegațiilor .....	308
Probleme .....	311

**CAPITOLUL IX. UNIVERSUL CUADRIDIMENSIONAL****AL LUI MINKOWSKI ..... 312**

9.1. Generalități .....	312
9.2. Intervale temporale și spațiale .....	314
9.3. Diverse reprezentări ale spațiului Minkowski .....	317
9.4. Cuadrivectori în spațiul Minkowski .....	324
Probleme .....	332

**CAPITOLUL X. MECANICĂ RELATIVISTĂ ..... 333**

10.1. Elemente de cinematică relativistă .....	333
10.2. Dinamică relativistă .....	335
10.3. Aplicații ale mecanicii relativiste .....	347
Probleme .....	357

**CAPITOLUL XI. ELECTRODINAMICĂ RELATIVISTĂ... 358**

11.1. Sarcina punctiformă în câmp electromagnetic .....	358
11.2. Tensorul câmpului electromagnetic .....	364
Probleme .....	372
11.3. Ecuația de continuitate sub formă cuadridimensională .....	373
11.4. Ecuațiile lui Maxwell sub formă cuadridimensională .....	376
11.5. Ecuațiile constitutive sub formă cuadridimensională .....	383
11.6. Ecuațiile diferențiale ale potențialelor electrodinamice sub formă cuadridimensională .....	388
11.7. Legi de conservare în teoria covariantă a câmpului electromagnetic .....	392
11.8. Elemente de magnetofluidodinamică relativistă .....	406

**CAPITOLUL XII. TEORIA RELATIVITĂȚII GENERALE 412**

12.1. Generalități .....	412
12.2. Teoria clasică a gravitației .....	413
12.3. Principiile teoriei relativității generale .....	417

12.4. Ecuația diferențială a liniilor geodezice.....	420
12.5. Derivata covariantă.....	424
probleme.....	431
12.6. Ecuațiile electrodinamicii în prezența câmpului gravitațional .....	432
12.7. Tensorul de curbură.....	435
12.8. Ecuațiile lui Einstein .....	439
Probleme .....	446
12.9. Câmpul gravitațional cu simetrie centrală.....	446
Probleme .....	453
12.10. Verificări experimentale ale teoriei relativității generale.....	453
ANEXA A.....	469
ANEXA B.....	483
ANEXA C.....	501
ANEXA D.....	516
ANEXA E.....	523
ANEXA F.....	531
BIBLIOGRAFIE.....	534
INDEX .....	241

